Fizikus MSc Matematikai problémamegoldó gyakorlat (BMETE95MF00)

2014 ősz

Ütemterv és napló

Ami már volt, az napló, ami még nem volt, az még csak terv, tehát változhat. A javasolt irodalmak bővülhetnek, ahogy a tervből napló lesz.

1. **Mérték- és integrálelmélet (szept. 12.):**

   Szigma-algebra, mérték és integrál, Lebesgue-mérték és -integrál, dominált és monoton konvergencia tételek, Fatou lemma, Fubini tétel. Fontos mértékelméleti érdekességek: egy Lebesgue-nemmérhető halmaz, illetve a Banach-Tarski paradoxon. Mértékek Lebesgue dekompozíciója átcsúszott a következő órára.

   - R. B. Ash: *Measure, integration, and functional analysis*
   - W. Rudin: *Real and complex analysis*
   - Jók az angol Wikipedia szócikkek, pld. Measure (mathematics), Lebesgue integration, meg a fentebb linkeltek.

2. **Metrikus terek (szept. 19.):**

   Mértékekről maradt a Lebesgue dekompozíció, lásd fenn, és a Cantor halmazzal konstruált szinguláris mérték.

   Metrikus terek: definíció, faktor-tér, teljesség. Geometriai és függvényteres példák. Topológia kezdetei: nyíltság és folytonosság.

   - A linkelt Wikipedia szócikkek.
   - W. Rudin: *Real and complex analysis*

3. **Topológia (szept. 26.):**

   Homeomorfizmus definíciója, példákkal és nem-példákkal. Topologikus terek. Kompaktság és szekvenciális kompaktság definíciója, néhány példa és nem-példa, mint a megszámlálhatóan végtelen dimenziós Hilbert-tér zárt egységgömbje. A kompaktság hasznára a jövő órán látunk néhány példát.

   - A linkelt Wikipedia szócikkek.
   - J. Munkres: *Topology*

4. **Ergodelmélet és dinamikai rendszerek (okt. 3.)**

Lesz nemsokára részletes ütemterv.

Összetettebb feladatok a beszámolókra:

Ez a lista még bővülhet. A megadott linkek csak kedvcsinálók; adok forrást, amikor kéritek. Magyar nyelvű forrást egyik témához se próbáltam találni, de elképzelhető, hogy valamelyikhez létezik; próbálok segíteni, ha valaki igényli. Értelemszerűen inkább a lista elején vannak olyan témák, amiket már az első beszámolón megérthetnek az előadók és a hallgatók.

1. Kompaktsági tételek: Arzelà-Ascoli tétel és/vagy Banach-Alaoglu tétel (topológia és funkanal)

2. Baire kategória tétel (topológia és funkanal). A Wikipedia szócikk elég borzalmas, viszont jó a W. Rudin: *Functional analysis*, McGraw-Hill 1973, könyv.

3. Hausdorff dimenzió, önhasonló halmazok, fraktálok (mértékelmélet)

4. Julia halmazok, Mandelbrot halmaz (komplex függvénytan, dinamikai rendszerek)

5. Entrópia a dinamikai rendszerekben és/vagy a statisztikus fizikában. Itt a Wikipedia gyűjtő-oldal.

6. Fürstenberg ergodelméleti megközelítése Szemerédi tételének

7. KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) elmélet. A Wikipedia csak pár szót ír, de vannak további linkek, a Scholarpedia már jóval többet.

8. Gauss leképezés és lánctörtek.

9. Loewner evolúció (a kétdimenziós statisztikus fizikában fontos SLE egyik alapja; komplex függvénytan)

10. Burgers egyenlet, esetleg mint forgalmi dugók hidrodinamikai limesze. Koagulációelmélet?

11. Hamilton-Jacobi-Bellman egyenlet, optimális kontroll, dinamikus programozás, játékelmélet

12. Az L^∞-Laplace egyenlet és esetleg véletlen kötélhúzás

13. Morse elmélet és/vagy két következménye: Poincaré-Hopf index-tétel és Gauss-Bonnet tétel (differenciálgeometria)

14. Hopf fibráció (differenciálgeometria, Lie-csoportok)

15. Brown-mozgás konstrukciói, alkalmazásai. Egy jegyzet, amit szeretek, itt meg könyv. Esetleg Gauss-féle szabad mező.

16. Bolyongások és elektromos hálózatok: Doyle-Snell, Lyons-Peres, PGG Sections 6.1-2

17. Martingálok: a legjobb jóslat, harmonikusság, stb. Itt egy híres példa. Ld. még PGG Section 6.3.

18. Folytonos spinmodellek a síkban: XY-modell, Mermin-Wagner tétel, Vicsek-féle madárvonulás

19. Galton-Watson folyamatok. Lsd. pld. PGG Section 12.1 végefelé, de nem tudom még, hogy mi lesz ebből órán.

20. Valami Markov-láncos. Itt egy nagy bevezető könyv. Órán persze lesz róluk szó.

Házi feladatok

Fizikus MSc Matematikai problémamegoldó gyakorlat, 2014 ősz

Minden héten 12 pontnyi feladat van kitűzve, mindegyik beadandó. A feladat annyi pontot ér, ahány • van mellette. Részpontszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el. A piros • pontok bónusz feladatokat jelölnek.

1. HF: (Beadási határidő: 2014. szept. 19.)

HF 1.1 *A Fatou lemma két alkalmazása*

(a) ••• Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mértéktér, $A_n \in \mathcal{F}$ pedig események, melyekre $\mathbb{P}(A_n) > \varepsilon > 0$ minden n-re. Legyen $A = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$, avagy szavakkal: az az esemény, hogy végtelen sok A_n teljesül. Igazold, hogy $\mathbb{P}(A) \geq \varepsilon$.

(b) •• Bizonyítsd a Dominált Konvergencia Tételt: ha egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mértéktéren az f, g és $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvényekre $f_n(x) \to f(x)$ majdnem minden $x \in \Omega$-ra, és $|f_n| \leq g$ teljesül, ahol $\int_\Omega g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) < \infty$, akkor

$$\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) \to 0, \text{ és így } \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

(Tipp: alkalmazzuk Fatout a $2g - |f - f_n|$ sorozatra.)

HF 1.2 *A karakterisztikus függvény differenciálhatósága.* Legyen μ egy *valószínűségi mérték* $\mathbb{R}$-en; föltesszük, hogy minden nyílt intervallum mérhető, így az ezek által generált legkisebb σ-algebra minden eleme (amit Borel-halmazoknak hívnak) is az. A μ *n-edik abszolút momentuma* ($n \in \mathbb{N}$-re) az

$$M_n := \int_{\mathbb{R}} |x|^n\,\mathrm{d}\mu(x)$$

integrál, *karakterisztikus függvénye* pedig a

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \psi(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mathrm{d}\mu(x)$$

függvény, ahol i a komplex egységgyök ($i^2 = -1$).

Megjegyzés: Ha μ egy X valószínűségi változó eloszlása, ami annyit tesz, hogy minden B Borel-halmazra $\mu(B) := \mathbb{P}(X \in B)$, akkor $I_n = \mathbb{E}(|X|^n)$ és $\psi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$.

Bizonyítsuk be a következő tételeket a Dominált Konvergencia Tétel segítségével:

(a) •••

1. Tétel (A karakterisztikus függvény differenciálhatósága). *A fenti jelölésekkel, ha $I_1 < \infty$, akkor ψ folytonosan differenciálható és*

$$\psi'(0) = i \int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{d}\mu(x).$$

(b) •• (bónusz)

2. Tétel (A karakterisztikus függvény differenciálhatósága II). *A fenti jelölésekkel, ha $I_n < \infty$, akkor ψ n-szer folytonosan differenciálható és*

$$\psi^{(k)}(0) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k\,\mathrm{d}\mu(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

HF 1.3 *Integrálok felcserélhetősége.*

(a) •• Legyen $f(x,y) = e^{-xy} - 3e^{-3xy}$. Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^1 \int_1^\infty f(x,y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \;>\; 0 \;>\; \int_1^\infty \int_0^1 f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Mi a helyzet a Fubini tétellel?

(b) •• Legyen $f(x,y)$ az $\mathbb{R}^2$ diagonáljának indikátorfüggvénye: $= 1$, ha $x = y$, és $= 0$ különben. Legyen μ a Lebesgue mérték $\mathbb{R}$-en, ν pedig a számlálómérték: $\nu(A) = |A|$ ha $A \subset \mathbb{R}$ véges, és $= \infty$ különben. (A ν esetén lehet a σ-algebra akár $2^{\mathbb{R}}$, azaz minden részhalmaz mérhető.) Mennyi

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\nu(y) \quad \text{illetve} \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, \mathrm{d}\nu(x)\, \mathrm{d}\mu(y)\,?$$

Megjegyzés: Ez a példa azt mutatja, hogy a Fubini-tétel általános mértékekre $f \geq 0$ esetén sem feltétlenül igaz. Kell, hogy mindkét mérték σ-véges legyen, ami azt jelenti, hogy az egész tér lefedhető legyen megszámlálható sok véges mértékű részhalmazzal. Ez ν-re nyilván nem teljesül.

2. HF: (Beadási határidő: 2014. szept. 26.)

HF 2.1 A szokásos *triadikus Cantor-halmaz* konstrukcióját módosítsuk a következőképpen:

- Nulladik lépésben tekintsük a $[0,1]$ zárt intervallumot: $D_0 := [0,1]$.
- Első lépésben vágjuk ki ennek a középső nyílt 1/4-ét — így marad 2 darab 3/8 hosszúságú zárt intervallum: $D_1 = [0, \frac{3}{8}] \cup [\frac{5}{8}, 1]$.
- Második lépésben vágjuk ki mindkettőnek a középső nyílt 1/9-ét, így marad 4 darab $(\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9})$ hosszúságú zárt intervallum — D_2 jelölje ezek unióját.
- És így tovább: az $n-1$-edik lépésben marad 2^n darab zárt intervallum, melyek mindegyikének az n-edik lépésben kivágjuk a középső nyílt $1/(n+1)^2$ hányadát, így D_n már 2^{n+1} darab zárt intervallum uniója.

Végül $D := \cap_{n=0}^{\infty} D_n$.

(a) •• Igazoljuk, hogy D kontinuum számosságú, zárt (azaz a komplementere nyílt), Borel-mérhető halmaz (definíciót lásd HF 1.2-ban), ami nem tartalmaz intervallumot.

(b) •• Mennyi a D Lebesgue-mértéke? (Főképpen: nulla-e?)

(c) •• Vagy egy hasonló Cantor-konstrukció komplementerét véve, vagy teljesen máshogy (pld a racionális számok egészen kis fölhízlalásával), tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz konstruáljunk a $[0,1]$-nek nyílt részhalmazát, mely mindenütt sűrű (azaz minden nyílt intervallumba belemetsz), de a Lebesgue-mértéke kisebb ε-nál.

Emlékeztető: Tetszőleges (X,d) metrikus térben $U \subseteq X$ **nyílt**, ha minden $x \in U$-ra $\exists\, \delta > 0$, hogy a $B_\delta(x) := \{y \in X : d(x,y) < \delta\}$ gömb benne van teljesen U-ban. Egy metrikus térből metrikus térbe való $\Phi : (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ leképezés folytonosságának két lehetséges definíciója:

Definíció A: $\forall x \in M$ pontra, és $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists \delta > 0$ (ez függhet ε-tól és x-től is), hogy $y \in M$, $d_M(x,y) < \delta$ esetén $d_N(\Phi(x), \Phi(y)) < \varepsilon$.

Definíció B: Minden M-beli nyílt U halmaz $\Phi^{-1}(U)$ ősképe nyílt halmaz N-ben.

HF 2.2 •• Mutassuk meg, hogy ha Φ a Definíció B értelmében folytonos, akkor a Definíció A értelmében is az. (Megj: ez még könnyebb, mint az órán bizonyított másik irány.)

HF 2.3 Vegyük az $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ korlátos folytonos függvények $\big(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ metrikus terét, ahol ugye $d(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup\big\{|f(x)-g(x)| : x \in \mathbb{R}\big\}$.

(a) •• A remélhetőleg jólismert tétel segítségével, miszerint folytonos függvények uniform limesze is folytonos (pl. http://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_limit_theorem), igazoljuk, hogy ez a metrikus tér teljes.

(b) •• Adjunk meg ebben a térben kontinuum sok páronként diszjunkt nyílt részhalmazt. (Ebből következik, hogy ez a metrikus tér nem szeparábilis, azaz nincsen benne megszámlálható mindenütt sűrű részhalmaz, azaz ami minden nyílt halmazba belemetszene.)

HF 2.4 (Bónusz) ••• Bizonyítsuk be, hogy minden X metrikus térhez létezik egy teljes metrikus tér $\hat{X}$, amiben X sűrű! (Pontosabban, létezik $\hat{X}$-ben egy sűrű Y, ami izometrikus X-szel.)

Segítség: legyenek $\hat{X}$ pontjai az X-beli $\{x_n\}$ Cauchy sorozatok ekvivalencia-osztályai, ahol $\{x_n\}$ és $\{y_n\}$ ekvivalens, ha $d(x_n, y_n) \to 0$. Definiáljunk egy nagyon természetes metrikát ezen a téren, igazoljuk, hogy ezzel $\hat{X}$ teljes, majd definiáljuk X egy izometrikus beágyazását $\hat{X}$-be.

3. HF: (Beadási határidő: 2013. okt. 3.)

HF 3.1 Néhány nagyon könnyű állítás a kompaktságról:

(a) • Igazoljuk, hogy kompakt halmaz tetszőleges zárt részhalmaza is kompakt.

(b) •• Bizonyítsuk be, hogy ha X egy metrikus tér, és $K \subseteq X$ kompakt (szekvenciálisan vagy simán, nekem mindegy, ahogy neked könnyebb bizonyítani), akkor K zárt és korlátos is.

(c) • Igazoljuk, hogy egy szekvenciálisan kompakt metrikus tér teljes is.

Definíció: Legyen $\{X_i, \mathcal{T}_i : i \in I\}$ topologikus terek egy családja. A **szorzattopológia** a $\prod_{i\in I} X_i$ szorzathalmazon az a legkisebb topológia, amiben az összes olyan $\prod_{i\in I} A_i$ halmaz benne van, ahol $A_i \in \mathcal{T}_i$ minden $i \in I$-re, és csak *véges sok* olyan i van, amire $A_i \neq X_i$. (Ezeket az általánosított téglatesteket, amikben csak véges sok koordinátáról mondunk valamit, a többi koordináta bármi lehet, hívjuk cilinderhalmazoknak.)

HF 3.2 •• Igazoljuk, hogy tetszőleges I halmazra és X topologikus térre, az összes $I \longrightarrow X$ függvények X^I halmazán a **pontonkénti konvergencia** topológiája pontosan a szorzattopológia. Azaz $f_n(i) \to f(i)$ minden $i \in I$-re akkor és csak akkor, ha az X^I szorzattopológiában minden $U \ni f$ nyílt halmazhoz létezik $N \in \mathbb{Z}$, hogy $f_n \in U$ minden $n \geq N$-re.

HF 3.3 ••• Legyen $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ a szorzattopológiával, azaz a pontonkénti konvergencia topológiájával. Az X-en hat a T eltolás: $(Tx)_n = x_{n+1}$, minden $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$-re.

(a) Adjunk meg egy metrikát X-en, ami a szorzattopológiát generálja.

(b) Bizonyítsuk be, hogy egy ilyen jó metrika nem lehet eltolásinvariáns (azaz, hogy $d(Tx, Ty) = d(x,y)$ lenne minden $x, y \in X$-re).

HF 3.4 (Bónusz) ••• Legyen $Y = [0,1]^{[0,1]}$ a szorzattopológiával.

(a) Nézzük a következő $\phi_n \in Y$ elemeket: $\phi_n(x) :=$ az n-edik jegy az x bináris felírásában. Bizonyítsuk be, hogy ebből a sorozatból nem választható ki Y-ban konvergens részsorozat. Tehát Y nem szekvenciálisan kompakt.

(b) Bizonyítsuk be, hogy Y-ban van kontinuum sok páronként diszjunkt nemüres nyílt halmaz.

HF 3.5 •••

(a) Legyen X egy ívszerűen összefüggő topológikus tér, azaz minden $x_0, x_1 \in X$ pontokhoz létezik folytonos görbe $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$, melyre $\gamma(i) = x_i$, $i = 0, 1$. Legyen Y egy X-szel homeomorf topológikus tér. Igazoljuk, hogy Y is ívszerűen összefüggő.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^2$ nem homeomorfak egymással! (Segítség: ez sokkal könnyebb, mint ha $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ lenne, szóval nem kell pld. definiálni a dimenzió fogalmát topologikusan. Hanem mondjuk lehetne az előző részt használni.)