

Házi feladatok 5. sorozat (7. hét)

1. Ha  $A_n$  mérhető, akkor  $\chi_{A_n} \rightarrow 0$   $\mu$ -m.m. pontosan akkor, ha

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k) = 0.$$

2. Ha  $f : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$  mérhető, akkor van olyan  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  monoton növény, hogy

$$\lambda(f < c) = \lambda(g < c) \text{ minden } c > 0\text{-ra.}$$

3. Számítsuk ki az  $x - x^3$  függvény teljes változását a  $[-1, 1]$  szakaszon.

4. Legyen  $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  folytonos, az  $(1/(n+1), 1/n)$  szakaszon kívül 0 és  $\int_0^1 g_n = 1$ . Legyen

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x))g_n(y).$$

Számítsuk ki  $\int_0^1 (\int_0^1 f \, dy) \, dx$  és  $\int_0^1 (\int_0^1 f \, dx) \, dy$  értékét.