H. Diszkrét idejű dinamika

Elméleti matematikában gyakran háttérbe szorul a diszkét idejű dinamika, pedig mind a numerikus analízisban, mind a közgazdaságtanban fontos szerepet játszik. A diszkrét idő előnyei: nem kell bizonyítani a megoldás létezését, könnyű programozni a megoldást, és alkalmas az időbeli késleltetések figyelembe vételére. Természetesen hátrányai is vannak: nem lehet folytonos vonallal szemléltetni a pályákat, s a megoldások „vadul” viselkednek. Röviden összefoglaljuk az eredményeket.

Lineáris differenciaegyenletek

Elsőrendű lineáris inhomogén differenciaegyenlet-rendszerről beszélünk, ha

$$x_{t+1} = Mx_t + w, \qquad t = 0, 1, 2, \dots \qquad \text{és} \qquad x \in \mathbf{R}^n. \tag{H.1}$$

Kezdetiérték-feladat esetén az x_0 kezdeti érték is adva van.

Az általános megoldáshoz szükségünk lesz a rendszer fixpontjára. (H.1)-ből a következő implicit egyenlet adódik a fixpontra:

$$x^{\mathrm{o}} = Mx^{\mathrm{o}} + w. \tag{H.1°}$$

(H.1°) általában (de nem mindig) megoldható. A fixpont létezése és egyértelműsége triviális:

H.1. tétel. *A (H.1) lineáris rendszernek pontosan egy fixpontja van, ha M-nek az 1 nem sajátértéke. Képlete:*

$$x^{\mathrm{o}} = (I - M)^{-1}w. \tag{H.2}$$

A lineáris differenciálegyenlet-rendszerek megoldásából ismert az inhomogén és homogén egyenlet megoldásának kapcsolata. Most ezt a fajta kapcsolatot aknázzuk ki a differenciaegyenlet-rendszer esetén.

Vezessük be az

$$\hat{x}_t = x_t - x^{\mathrm{o}} \tag{H.3}$$

*eltérés*vektort, és vonjuk ki (H.1)-ből (H.1°)-t:

$$\hat{x}_{t+1} = M\hat{x}_t. \tag{H.$\hat{4}$}$$

Szóban: az eltérésvektorok kielégítik azt a homogén rendszert, amely az inhomogén (H.1) rendszerből az additív állandó elhagyásával keletkezik. (H.$\hat{4}$) sorozatos behelyettesítésével adódik

$$\hat{x}_t = M\hat{x}_{t-1} = M^2\hat{x}_{t-2} = \cdots = M^t\hat{x}_0. \tag{H.$\hat{5}$}$$

Visszaírva az eredeti változókat: $x_t = x^o + M^t(x_0 - x^o)$.

A továbbiakban a homogén rendszerrel foglalkozunk, és rövidség kedvéért elhagyjuk a kalapot (azt is mondhatjuk, hogy $w = 0$.) A hivatkozások kedvéért új alakjában újra fölírjuk az $(H.\hat{3})$ – (H.$\hat{4}$) egyenletpárt:

$$x_{t+1} = Mx_t, \tag{H.4}$$

$$x_t = M^t x_0. \tag{H.5}$$

Lineáris algebrából azonban ismert, hogy M sajátértékei és sajátvektorai segítségével M^t egyszerűen fölírható. A dinamikus rendszerek elemzésénél a transzformáció sajátértékeinek és sajátvektorainak jelentőségét éppen az adja, hogy a transzformáció hatványozásánál az előbbiek úgy viselkednek, mintha skalárok volnának, az utóbbiak pedig helyben maradnak. Pontosabban:

$$M^t s = \lambda^t s, \qquad t = 0, 1, 2, \dots. \tag{H.6}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy létezik n darab lineárisan független sajátvektor, azaz egy *sajátbázis*:

$$P(\lambda_j) = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n; \tag{H.7}$$

$$Ms_j = \lambda_j s_j, \qquad j = 1, 2, \dots, n. \tag{H.8}$$

Ekkor bármely x_0 kezdeti vektor felírható a sajátvektorok segítségével:

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j s_j. \tag{H.9}$$

Fölhasználva (H.5)–(H.6)-ot, (H.8)–(H.9) a következő összefüggést adja:

$$x_t = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \lambda_j^t s_j, \qquad t = 1, 2, \dots \tag{H.10}$$

Igaz a

H.2. tétel. *Ha M-nek létezik egy sajátbázisa, akkor a sajátvektorok segítségével a kezdeti állapotot fölírhatjuk (H.9) alakban, és a sajátértékeket is igénybe véve a t-edik állapot fölírható (H.10) alakban.*

A számos stabilitásfogalom közül a rövidség kedvéért csak a *lokálisan aszimptotikus stabilitással* foglalkozunk, ahol a fixpont megfelelő környezetéből induló bármely pálya aszimptotikusan tart a fixponthoz: $\lim_{t\to\infty} x_t = x^o$, esetünkben 0-hoz.

Lineáris esetben viszonylag egyszerű a stabilitás elégséges feltétele, és lokális helyett globális stabilitás áll.

H.3. tétel. *A diszkrét idejű (H.1) lineáris rendszer akkor és csak akkor stabil, ha az M mátrix spektrálsugara kisebb mint 1:*

$$\rho(M) < 1.$$

Bizonyítás. a) Tegyük föl, hogy létezik sajátbázis. Ekkor (H.10) szerint x_t akkor és csak akkor tart nullához, ha minden sajátérték-hatvány nullához tart, azaz minden sajátérték abszolút értékben kisebb, mint 1. b) Az általános esetben ugyanezt az eredményt kapjuk. ∎

A differenciaegyenletek elméletében kiemelkedően fontosak a kétváltozós rendszerek. Ezért az állandó-együtthatós kétváltozós (síkbeli) lineáris rendszereket külön megvizsgáljuk: $n = 2$, különös tekintettel az oszcillációkra (ciklusra).

Szükségünk lesz a rendszer másodfokú karakterisztikus polinomjára, melynek gyökei meghatározzák a rendszer kvalitatív viselkedését:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \omega\lambda + \vartheta,$$

ahol

$$\omega = \operatorname{tr} M = m_{11} + m_{22} \qquad \text{és} \qquad \vartheta = \det M = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}.$$

Oszcillációról beszélünk, ha az eltérésváltozók minden időbeli korlátozáson túl időnként előjelet váltanak. Két alesete van:

a) *Elfajult oszcilláció* áll fönn, amikor egy átmeneti időszak után mindkét változó minden időszakban előjelet vált.

b) *Szabályos oszcilláció* áll fönn, amikor a két változó előjelváltása nem mindig egyidejű.

Szimmetria miatt feltehető, hogy $|\lambda_2| \le |\lambda_1|$:

H.4. tétel. *Tipikusan a következő sajátérték párosítások alapján osztályozzuk a síkbeli lineáris rendszereket;*

a) a domináns sajátérték pozitív, $|\lambda_2| < \lambda_1$: oszcillációmentes;

b) a domináns sajátérték negatív, $|\lambda_2| < -\lambda_1$: elfajultan oszcilláló;

c) komplex sajátértékek, $|\mathbf{Re}\lambda_1| < |\lambda_1|$: szabályos oszcilláció.

A lineáris differenciálegyenletekhez hasonlóan a komplex gyökök esetén a konjugáltak miatt a számolás végén kiesnek a képzetes mennyiségek.

Állandó-együtthatós *n-edrendű* lineáris skalár differenciaegyenletről beszélünk, ha a y_t mellett y_{t-n} a legkorábbi érték az egyenletben:

$$y_t = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y_{t-k}, \qquad a_0 \neq 0.$$

Az ilyen egyenletek egyszerű transzformációval visszavezethetők n-dimenziós elsőrendű egyenletekre, de közvetlenül is megoldhatók (Euler, kb. 1740). Az $y_t = \lambda^t$ alapmegoldással kísérletezve, a karakterisztikus egyenlet közvetlenül

$$\lambda^t = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^{t-k}, \qquad a_0 \neq 0,$$

illetve λ^{t-n}-nel osztás után

$$\lambda^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^{n-k}.$$

Tipikusan a gyökök különböznek, ezt a továbbiakban feltesszük.

H.5. tétel. *Az n-edrendű állandó együtthatós lineáris differencia-egyenlet általános megoldása*

$$y_t = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \lambda_k^t,$$

ahol η_k állandók skalárok, amelyeket az $y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ kezdeti feltételek egyértelműen meghatároznak. Ezt szemlélteti az

H.1. példa. Fibonacci-számok (1202). „Egy gazdának van egy pár nyula. Tegyük föl, hogy ez a pár nyúl minden hónapban egy újabb pár nyulat fiadzik, amelyek mindegyike kéthónapos korától szintén havonta egy pár nyúlnak ad életet. A kérdés az, hogy az egymás után következő hónapokban hány pár nyula lesz a gazdának" (Simonyi, 1981, 122. o.). Könnyű belátni, hogy a választ a következő rekurzió adja: $F_t = F_{t-1} + F_{t-2}$, $F_0 = 1$ és $F_1 = 1$. A rendszer karakterisztikus egyenlete (más szóval: a sorozat generátorfüggvénye, de Moivre, 1724): $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, a sajátértékek: $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. A megoldás $F_t = \xi_1 \lambda_1^t + \xi_2 \lambda_2^t$ alakú. A kezdeti feltételekből ξ_1 és ξ_2 meghatározható: $F_0 = \xi_1 + \xi_2 = 1$ és $F_1 = \xi_1 \lambda_1 + \xi_2 \lambda_2 = 1$. $\xi_{1,2} = (5 \pm \sqrt{5})/10$.

Nemlineáris differenciaegyenletek

A nemlineáris differenciálegyenletek elmélete sokkal bonyolultabb, mint a lineárisaké, ezért ebben a bevezető jegyzetben csak mesélni fogok, olykor hivatkozva a differenciálegyenletek elméletére.

Kezdjük az autonóm nemlineáris elsőrendű differenciaegyenlet-rendszer felírásával:

(H.11) $$x_{t+1} = f(x_t), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0 \qquad \text{adott.}$$

A vizsgálatot megkönnyíti, ha a rendszernek van *fixpontja*:

(H.12) $$x^{\mathrm{o}} = f(x^{\mathrm{o}}).$$

Ellentétben a lineáris rendszerekkel, a nemlineáris rendszerben nincs egyszerű megoldási eljárás.

Ljapunovtól származik az az elgondolás, hogy ellentétben a lineáris rendszerekről szóló eredményekkel, anélkül is vizsgálható a stabilitás, hogy a megoldást meg tudnánk (vagy meg kellene) határozni, *kvalitatív elmélet*. Csupán olyan pozitív függvényre van szükség, amellyel mérve a távolságot a fixponttól, a függvény csökken. Szabatosan megfogalmazva: egy folytonos $V : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ függvényt *Ljapunov-függvény*nek nevezünk az f függvényre nézve, ha

(i) a V függvény a fixpontban nulla, különben pozitív:

$$V(x^{\mathrm{o}}) = 0 \qquad \text{és} \qquad V(x) > 0 \quad (x \neq x^{\mathrm{o}});$$

és

(ii) lényegében minden $(x, f(x))$ állapotpárban V csökken:

$$V[f(x)] < V(x) \qquad \text{kivéve, ha} \qquad x = x^{\mathrm{o}}.$$

H.6. tétel. *(Ljapunov, 1893.) Ha létezik egy Ljapunov-függvény a dinamikára nézve, akkor a fixpont globálisan stabil.*

Megjegyzés. A végesdimenziós euklideszi térre specializált Banach-féle fixponttétel is hasonló jellegű.

Az alfejezet hátralévő részében alapvető szerepet játszik a legegyszerűbb nemlineáris függvény.

H.2. példa. Logisztikus egyenlet: Legyen $n = 1$ és

$$f(x) = ax(1-x), \quad 0 < x < 1 \qquad , \text{és} \qquad 0 \le a \le 4.$$

Működőképesség: $0 \le f(x) \le f(1/2) = a/4 < 1 \Leftrightarrow 0 \le a \le 4$. Fixpont: $x^{\mathrm{o}} = 1 - 1/a$. Lokális stabilitás: $|f'(x^{\mathrm{o}})| < 1$. Mivel $f'(x) = a(1-2x)$ és $f'(x^{\mathrm{o}}) = 2 - a$; a stabilitási tartomány: $1 < a < 3$. (A triviális $x^{\mathrm{o}} = 0$ fixpont instabil: $f'(0) = a > 1$.)

Rátérünk a ciklusokra.

Definíció. Legyen P egy 1-nél nagyobb természetes szám. Egy $x_1, x_2, \ldots, x_P$ vektorsorozatot az f rendszer *P-periódusú ciklus*ának nevezzük, ha az x_1-ből induló pálya $x_2, \ldots, x_P$-n keresztül visszatér x_1-be.

Nemcsak a fixpont, de a ciklus is lehet stabil.

Definíció. Egy $x_1, \ldots, x_P$ ciklust az f rendszer *P-periódusú lokális határciklus*ának nevezünk, ha az x_1 közelében induló pályák rásimulnak a ciklusra. Képletben:

$$\text{(H.13)} \qquad \text{Ha} \quad y_1 \approx x_1, \qquad \text{akkor} \quad \lim_{k\to\infty} y_{kP+Q} = x_Q,$$

ahol k és Q egészek, $1 \le Q \le P$.

Globális határciklus esetén *majdnem* tetszőleges induló állapotból induló pályától megköveteljük a konvergenciát. Lehetnek azonban kivételes induló állapotok, például egy instabil fixpont, amelyből nyilván nem mozdul ki a rendszer.

A fixpont és a ciklus közti hasonlóságot az f függvény *iteráltjai*nak segítségével érthetjük meg, amelyeket rekurzióval definiálunk:

$$f^1(x) = f(x), \quad f^2(x) = f(f(x)), \ldots, f^t(x) = f(f^{t-1}(x)).$$

Megjegyezzük, hogy $x_t = f^t(x_0)$.

H.7. tétel. *Ciklus és fixpont. a) A (H.11) rendszernek az $x_1, x_2, \ldots, x_P$ sorozat akkor és csak akkor P-periódusú ciklusa, ha a*

$$z_t = f^P(z_{t-1})$$

P-iterált rendszernek x_Q a Q-adik nem triviális fixpontja:

$$x_Q = f^P(x_Q) \ne f(x_Q), \qquad Q = 1, \ldots, P.$$

b) Az a) ciklus akkor és csak akkor lokálisan stabil (határciklus), ha a megfelelő fixpontok stabilak, azaz, ha a megfelelő mátrix stabil:

$$\text{(H.14)} \qquad \rho[\mathbf{D}f(x_P)\cdots\mathbf{D}f(x_1)] < 1.$$

A következő példában egy 2-határciklust határozunk meg.

H.3. példa. Iterált logisztikus egyenlet. 2-határciklus: A H.4. tétel alapján

$$f^2(x) = af(x)[1 - f(x)] = a^2x(1 - x)(1 - ax + ax^2), \quad 0 < x < 1.$$

2-ciklus: $x_i = f^2(x_i)$, $i = 1, 2$ és $x_i \neq x^o$. A kapott $a^3x^3 - 2a^3x^2 + a^2(1 + a)x - a^2 = 0$ harmadfokú egyenletet elosztva $a(x - x^o)$ elsőfokú gyöktényezővel, egy másodfokú egyenlethez jutunk: $a^2x^2 - a(a + 1)x + (a + 1) = 0$, melynek két valós gyöke van:

$$x_{1,2} = \frac{(a + 1) \pm \sqrt{(a + 1)(a - 3)}}{2a},$$

mindkettő 0 és 1 közé esik, ha $3 < a < 4$.

Stabilitás: (H.14) szerint $f^{2'}(x_i) = f'(x_1)f'(x_2) = -a^2 + 2a + 4$, stabilitási tartomány: $|f^{2'}(x_i)| < 1$, azaz $3 < a < 1 + \sqrt{6}$.

Most olyan nemlineáris rendszereket fogunk tanulmányozni, amelyek se nem stabilak, se nem ciklikusak, se nem kvázi-ciklikusak, hanem kaotikusak.

Természetesnek tűnhet, hogy a dinamikus rendszer pályája alig változik, ha a kezdőérték kicsit változik. Ezen alapul a Laplace-féle determinizmus: ha ismerjük a rendszer kezdőállapotát és mozgásegyenletét, akkor tetszőleges múltbeli vagy jövőbeli pillanatra meghatározható a rendszer állapota. Ennek egyik legsikeresebb példája az volt, amikor Leverrier (és Adams) számításai alapján a csillagászok 1846-ban fölfedezték a Neptunt. A (H.11) dinamikus rendszerről azt mondjuk, hogy az x_0 pontban *érzéketlen a kezdőértékre*, ha a) a pálya korlátos és b) közelről induló pályák mindig közel maradnak egymáshoz. Képletben: minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta_\varepsilon > 0$, hogy ha $||x_0 - y_0|| < \delta_\varepsilon$, akkor $||x_t - y_t|| < \varepsilon$, $t = 1, 2, \ldots$.

Megjegyzések. 1. Könnyen belátható, hogy egy korlátos lineáris rendszer minden pontjában érzéketlen a kezdőértékre. Valóban, az a) feltétel miatt csak olyan rendszereket kell tekintenünk, melyeknek a sajátértékei abszolút értékben nem nagyobbak, mint 1 [(H.10)]. Emiatt az eltérések tetszőleges kicsinek tarthatók.

2. Ha nem tennénk föl a korlátosságot, akkor számos lineáris rendszer nem lenne a kezdőértékekre érzéketlen. Valóban, legyen $x_{t+1} = 2x_t$. Ekkor kis δ esetén az $x_0 = \delta$ és a 0 kezdőérték nagyon közel van egymáshoz, de a belőlük induló $2^t\delta$ és 0 pályák egyre messzebb kerülnek egymástól. Ebben semmi meglepő nincsen, s a továbbiakban nem foglalkozunk nem korlátos rendszerekkel.

3. Emlékeztetőül: még olyan jól viselkedő nemlineáris rendszer is érzékeny néhány kezdőállapotra, amelynek globális határciklusa van; az instabil fixpontból induló pálya a fixpontban marad, de akármilyen szűk környezetéből induló összes többi pálya a határciklushoz tart: a H.3. példa.

Eddig kizárólag klasszikus fogalmakkal foglalkoztunk, amelyeknek önmagukban semmi közük sincs a káoszhoz. Most rátérünk az alfejezet központi fogalomcsoportjára.

Egy dinamikus rendszert *valóban kaotikus*nak nevezünk, ha pozitív valószínűséggel a pálya érzékenyen függ a kezdőértéktől.

Korábbi megfigyelésünk szerint csak nemlineáris függvényeknél találkozhatunk káosszal.

Egy valóban kaotikus rendszer legalábbis egy pozitív mértékű kezdőállapothalmazon rosszul viselkedik. Ez azt jelenti, hogy a rendszerre pozitív valószínűséggel *nem* érvényes a laplace-i determinizmus. Az elv annak ellenére nem érvényes, hogy nagyon egyszerű, kis-szabadságfokú rendszerről van szó. Ezt a körülményt még 1900 előtt Poincaré fölismerte az ún. háromtest probléma kapcsán, de ez több évtizedig elsikkadt.

H.8. tétel. *Legyen f egy egycsúcsú és sima függvény, amely az $I = [a, b]$ valós intervallumot önmagára képezi le. Tegyük föl, hogy a függvénynek van 3-ciklusa, azaz egy olyan c pontja, amelyre*

$$f(c) \neq f^2(c) \neq f^3(c) = c.$$

a) (Sárkovszkij, 1964.) Ekkor bármely, 1-nél nagyobb természetes P számra a rendszernek van P-ciklusa.

b) (Li és Yorke, 1975). Ekkor a rendszer topologikusan kaotikus.

Megjegyzések. 1. A bizonyítás meglehetősen hosszadalmas, de nem igényel mély eszközöket. Meglepő, hogy a tételt nem fedezték föl jóval korábban.

2. Könnyen belátható, hogy számos függvénynek van 3-ciklusa (például a logisztikus egyenlet $a = 3{,}84$ esetén), de nagyon meglepő, hogy minden P-re van P-ciklusa. Képzeljünk el egy olyan $\{x_{1,P}, x_{2,P}, \ldots, x_{P,P}\}_{P=2}^{\infty}$ kettős sorozatot a $(0, 1)$ intervallumban, amelyre $f : x_{1,P} \to x_{2,P} \to \ldots \to x_{P,P} \to x_{1,P}$, $P = 2, 3, \ldots$.

Egy közgazdasági ciklusmodell

Hicks (1950) ciklusmodellje az egyik legérdekesebb és leghasznosabb modell. Módszertani szempontból az adja az érdekességét, hogy mindössze két független változóval képes a gazdaság ciklusait modellezni. Makroökonómiában megszokott módon változatlanáras értékekkel dolgozunk. Legyen Y_t a *termelés* (GDP), I_t a *nettó beruházás* és C_t a *fogyasztás* volumene a t-edik időszakban. A készletfelhalmozást belefoglaljuk a beruházásba (tulajdonképpen felhalmozásra gondolunk), s zárt gazdaságot feltételezünk. Először a lineáris változatot mutatjuk be, majd vázoljuk a nemlineáris módosítást is.

Zárt gazdaságban a három változó között egy azonosság áll fenn: termelés =beruházás+fogyasztás, azaz teljesül a
GDP azonosság

$$Y_t = I_t + C_t. \tag{H.15}$$

J. M. Clark 1917-ben vezette be a *beruházási akcelerátor*t, amely szerint minden időszakban a beruházás arányos az előző időszak termelésváltozásával. A szóban forgó egyenletet Hicks (1950)-ben kiegészítette az *autonóm beruházás*sal.
Lineáris beruházási függvény

$$I_t = I_t^{\mathrm{A}} + \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}). \tag{H.16}$$

Keynes (1936) óta a fogyasztást gyakran az előző időszaki jövedelem (azaz termelés) lineáris függvényeként írják le, amelyet még egy autonóm taggal módosítanak.
Lineáris fogyasztási függvény

$$C_t = C_t^{\mathrm{A}} + \gamma Y_{t-1}, \tag{H.17}$$

ahol γ a *fogyasztási határhajlandóság*, $0 < \gamma < 1$; és $1/(1-\gamma)$ a híres *multiplikátor*.

Adott I^{A} és C^{A} pálya, adott β és γ együttható, valamint adott Y_{-1}, Y_{-2} kezdeti érték mellett az I, C és Y pálya egyértelműen meg van határozva.

Három egyenletünk van, három változóval. Érdemes azonban megszabadulni a nélkülözhető változóktól és a nélkülözhető egyenletektől. Két lehetőségünk van, hogy a szokatlan alakú egyenletrendszert szokásos alakra hozzuk: visszavezetni a) két elsőrendű többváltozós differenciaegyenletre, vagy b) egy másodrendű egyváltozós differenciaegyenletre. A másodikat választva, helyettesítsük be (H.16)-ot és (H.17)-et (H.15)-be, s rendezéssel eljutunk egy másodrendű, egyváltozós *alapegyenletrendszer*hez:

(H.18) $$Y_t = I^{\mathrm{A}} + C^{\mathrm{A}} + (\beta+\gamma)Y_{t-1} - \beta Y_{t-2}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

ahol Y_{-2} és Y_{-1} adott kezdeti értékek. Az Y_t *alapváltozó* dinamikájának ismeretében a többi változó (I_t és C_t) dinamikája egyszerűen kiszámítható a (H.16) és a (H.17) egyenletből.

Két tételt mondunk ki: egyet a egyensúlyra, egyet a stabilitásra és oszcillációra.

H.9. tétel. *(Hicks, 1950.) Az elemi hicksi rendszer Y^{o} egyensúlya létezik és egyértelmű:*

(H.19) $$Y^{\mathrm{o}} = \frac{I^{\mathrm{A}} + C^{\mathrm{A}}}{1-\gamma}.$$

H.10. tétel. *(Hicks, 1950.) a) A rendszer akkor és csak akkor oszcillál, ha*

(H.20) $$\gamma < 2\sqrt{\beta} - \beta.$$

b) A rendszer akkor és csak akkor stabil, ha

(H.21) $$\beta < 1.$$

Megjegyzés. Valóságos körülmények között éves modellben $\beta \approx 0{,}5$ és $\gamma \approx 0{,}75$. Tehát oszcilláció és stabilitás empirikusan összeférhetetlen. A determinisztikus lineáris modell helyett vagy determinisztikus nemlineáris modellt kell vizsgálni vagy sztochasztikus lineáris modellt.

H.1–H.4. ábra

Ez a modell azonban csak speciális esetben ad szigorú ciklust, és a kilengés nagyságát a kezdeti feltételek határozzák meg. Ez közgazdasági szempontból elfogadhatatlan. Helyette egyszerűen Hicks nemlineárissá tette a lineáris rendszert. Ha a beruházás negatív lenne, akkor helyette 0-ra módosul az érték. Ha a fogyasztás olyan nagy lenne, hogy a már meghatározott beruházással együtt a keletkező kibocsátás felülmúlná a teljes foglalkoztatás adta potenciális GDP-t, akkor a fogyasztást annyival vissza kell vágni, hogy a módosított kibocsátás egyenlővé váljon a potenciális GDP-vel.

Ekkor határciklusokat kapunk.