Matematikus differenciálegyenletek vizsga

2009. december 16.

1. Elmélet

1. A Ljapunov-értelemben vett stabilitás/aszimptotikus stabilitás definíciója. Aszimptotikus stabilitás a lineáris közelítés alapján tétel megfogalmazása, a bizonyítás alapgondolata.
2. A kezdeti értékektől és paraméterektől való differenciálható függés, variációs rendszer. Tételek (bizonyítás nélkül).

2. Feladatok

1. $y'(2x^3 + 2 + e^{3y}) = 3x^2$ általános megoldása?
2. Keressen $f(x - y)$ alakú integrálótényezőt a következő differenciálegyenlethez, és oldja meg az egyenletet:
$$(x^2 - 2xy - 3y^2)\,\mathrm{d}x - (y^2 - 2xy - 3x^2)\,\mathrm{d}y = 0.$$
3. Milyen p, q esetén korlátos $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = \sin t$ minden megoldása?
4. a) Vázolja
$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + ay\\ \dot{y} &= 5x - y\end{aligned}$$
fázisképét $a = -1$ és $a = 3$ esetén.

   b) $a = -1$ esetén adja meg az $x(0) = 0$, $y(0) = -2$ kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldást Laplace-transzformáció segítségével vagy másodrendű egyenletre visszavezetve.
5. Vizsgálja az
$$\begin{aligned}\dot{x} &= e^{-2x} - 1 + z(y + 1)\\ \dot{y} &= \operatorname{sh} x - \sin(2y)\\ \dot{z} &= x + \operatorname{arctg} y - 4\operatorname{tg} z\end{aligned}$$
differenciálegyenlet-rendszer $x = y = z = 0$ megoldásának (aszimptotikus) Ljapunov-stabilitását linearizálás segítségével!