24/, **Tétel**: (1. definitség tétel kritérium)

Egy valós értékű g kvadr. alak:

poz. definit $\Leftrightarrow$ $\forall$ sajátértéke poz.

poz. szemidefinit $\Leftrightarrow$ $\forall$ —"— ≥ 0, de 0 is sajátértéke

negatív definit $\Leftrightarrow$ $\forall$ —"— negatív

negatív szemidefinit $\Leftrightarrow$ $\forall$ —"— ≤ 0, de 0 is sajátértéke

indefinit $\Leftrightarrow$ van poz és neg. sajátértéke is

25. előadás

Ha $g(x)$ kvadratikus alak, akkor $g(\underline{x}) = [\underline{x}]^T \underline{\underline{A}} [\underline{x}]$, ahol $\underline{\underline{A}}$ a g mátrixa egy rögzített $e_1, \dots, e_n$ bázisban.

Így $g(x) = [x_1, x_2 \dots x_n]_{1 \times n} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = [a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n, \dots a_{1n}x_1 + \dots + a_{nn}x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Def.: Egy g kvadratikus alak $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ alakját a g kanonikus alakjának nevezzük.

Tétel: Minden valós, ill. komplex $\underset{\text{változós, valós értékű}}{\textbf{kvadratikus}}$ alak kanonikus alakra hozható.

Biz.: Legyen $e_1, \dots, e_n$ a vizsgált euklideszi tér egy ortonormált bázisa.

Legyen $\underline{\underline{A}}$ a vizsgált kvadratikus alak (jel. g) mátrixa ebben a bázisban.

Világos, hogy $\underline{\underline{A}}$ szimmetrikus (kompl. esetben önadjungált)

Így a vizsgált eukl. térnek van olyan $e_1', \dots, e_n'$ ortonormált bázisa melynek vektorai $\underline{\underline{A}}$ sajátvektorai. Ebben a bázisban $\underline{\underline{A}}$ diagonális $= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$; $\lambda_1 \dots \lambda_n$ az $\underline{\underline{A}}$ sajátértékei $(\lambda_i \in \mathbb{R})$

Jelölje $\underline{\underline{C}}$ az $e_i \to e_i'$ bázistransz. mátrixát. Akkor $\underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}$ lesz az $\underline{\underline{A}}$ új alakja $= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

A g alakja a régi (e_i) bázisban $g(\underline{x}) = [\underline{x}]^T \underline{\underline{A}} [\underline{x}]$. Az új bázisban $[\underline{x}']^T \underline{\underline{C}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}} [\underline{x}'] = g(\underline{x}')$.

Mivel $e_1, \dots, e_n$ és $e_1', \dots, e_n'$ is ortonormált bázis, ezért $\underline{\underline{C}}$ ortogonális mátrix, ami azt jelenti, hogy $\underline{\underline{C}}^{-1} = \underline{\underline{C}}^T$ /komp.: $\underline{\underline{C}}^{-1} = \overline{\underline{\underline{C}}^T}$/

Így $g(\underline{x}') = [x']^T \begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix} [x'] = \lambda_1 x_1'^2 + \ldots \lambda_n x_n'^2$, amely kanonikus alak. □

Megj.: Legyen rang $\underline{\underline{A}} = r$. Akkor rang$(\underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{C}}) = r \Rightarrow$ rang $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix} = r$

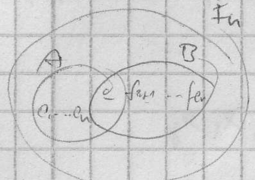
Így a $\lambda_1 x_1'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2$ alakban a nemnulla együtthatók száma $= r$.

Tétel: (Sylvester-féle tehetetlenségi tétel)

Valós értékű kvadratikus alak kanonikus alakjában determinált a poz és negatív együtthatók száma.

Biz.: A g kanonikus alakja $e_1, \ldots, e_n$-ben $g(x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$ és $f_1, f_2, \ldots, f_n$-ben $g(\underline{x}^*) = \lambda_1^* x_1^{*2} + \ldots + x_n^* x_n^{*2}$. Legyen $g(x)$-ben a poz együtthatók száma $= p$, $g(\underline{x}^*)$-ban pedig p^*. Feltehetjük, hogy $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, ill. $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_{p^*}^*$ jelöli a poz. együtthatókat. Tfh. $p > p^*$. Legyen $\underline{A} := \{\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p ;\ \alpha_i \in \text{Test}\}$

Legyen $B := \{\alpha^*_{p^*+1} f_{p^*+1} \ldots + \alpha_n^* f_n ;\ \alpha_i^* \in \text{Test}\}$



Tfh. $A \wedge B = \underline{0}$.

Tfh. $\xi_1 \underline{e}_1 + \ldots + \xi_p e_p + \xi_{p^*+1} f_{p^*+1} + \ldots + \xi_n f_n = 0$

$$A \ni \underbrace{\xi_1 \underline{e}_1 + \ldots + \xi_n e_p} = \underbrace{-\xi_{p^*+1} f_{p^*+1} - \ldots - \xi_n f_n} \in B$$

$$\Rightarrow \quad \underline{0} \quad = \quad \underline{0}$$

$$\Rightarrow \xi_1 = \ldots = \xi_n = 0 \qquad \xi_{p^*+1} = \ldots = \xi_n = 0$$

$e_1 \ldots e_p\ f_{p^*+1} \ldots f_n$ lin. ftlen $\Rightarrow p + n - p^* \leq n \Rightarrow p \leq p^*$ ↯

Így $A \wedge B \neq \underline{0}$. Legyen $\underline{x} \neq \underline{0}$, $x \in A \wedge B$. Akkor $g(x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots \lambda_p x_p^2 + \lambda_{p+1} 0^2 + \ldots + \lambda_n 0^2 > 0$

$g(\underline{x}^*) = \lambda_1^* 0^2 + \ldots + \lambda_{p^*} 0^2 + \lambda_{p^*} 0^2 + \lambda_{p^*+1} x_{p^*+1}^{*2} + \ldots + \lambda_n x_n^* \leq 0$

$\underline{x} =$

poz elő száma = poz tehetetlenségi index
neg —"— = neg —"—
poz − neg elő = szignatúra

2 valós ~~tehetetlenségű~~ kvadr. alak $\Leftrightarrow$ rendelkezik közös kanonikus alakkal ha rangjuk és szignatúrájuk is megegyezik.

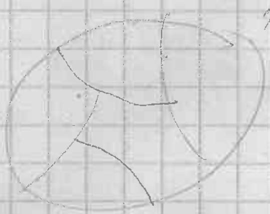
λ-mátrixok (polinomiális mátrixok):

Def.: Legyen $\mathcal{F}$ egy test. Olyan mátrixot melynek elemei $\mathcal{F}$ test feletti polinomok, polinomiális mátrixnak nevezzük.
Ha polinom $\in \mathcal{F}(\lambda)$, akkor a mátrixot λ-mátrixnak is szokás nevezni.

(Pl) Tetsz. test feletti $A_{n\times n}$ mátrix esetén az $\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}$ mátrix (az ún. karakterisztikus mátrix) λ-mátrix.

Def.: Két λ mátrixról, azt mondjuk, hogy egymással ekvivalensek, ha véges sok elemi átalakítással egymásba vihetők.

Megj.: λ-mátrixok ekvivalenciája megadja a λ-mátrixok halmazának egy osztályozását.



λ mátrixok
$/M_n(\mathcal{F}[\lambda])/$

Def.: Egy $n\times n$-es λ mátrixot kanonikus mátrixnak nevezünk, ha a köv alakú:
$$\begin{bmatrix} e_1(\lambda) & & & 0 \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e_n(\lambda) \end{bmatrix}$$
alakú /diagonális/, ahol $e_{i-1}(\lambda)$ osztja $e_i(\lambda)$-nak $(i=2,\dots,n)$, s ha valamelyik $e_i(\lambda)\not\equiv 0$, akkor az a polinom egy főpolinom (főegyütthatója $= 1$).

(Pl)
$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & e_4(\lambda) & & & & \\ & & & & e_5(\lambda) & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ 0 & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$
$p\times p$

Tétel: Tetsz. test esetén $\forall$ $n\times n$-es λ-mátrix kanonikus alakra hozható (másképpen, $\forall$ $n\times n$-es λ-mátrix ekvivalens egy kanonikus mátrixszal)

Biz: Legyen $\underline{A}$ tetsz. ($n\times n$-es) λ-mátrix. Ha $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{0}}$, akkor $\underline{\underline{A}}$ kanonikus mátrix.
Tfh.: $\underline{A} \neq \underline{O}$. Akkor van az $\underline{A}$-val ekvivalens olyan mátrix, mely
$$\begin{bmatrix} e_1(\lambda) & b_2(\lambda) & b_3(\lambda) \\ c_2(\lambda) & & \\ \vdots & & \\ c_n(\lambda) & & \end{bmatrix}$$
alakú, ahol $e_1(\lambda)\neq 0$ és $e_1(\lambda)$ főpolinom.

Megmutatható, hogy $e_1(\lambda) \mid b_j(\lambda)$ $/j=2..n/$

$b_j(\lambda) = e_1(\lambda)\, q(\lambda) + r(\lambda)$; $r(\lambda) \equiv 0$ vagy $r^* < e_1^*$

Tfh. ~~$e_j(\lambda)$~~ az $\underline{A}$-val ekvivalens mátrixok között nincs olyan amelyiknél a bal felső sarokban $e_1(\lambda)$-nál kisebb fokszámú polinom állna.

Ha $r^* < e_1^* \Rightarrow$ a mátrix j-dik oszlopából vonjuk ki az első oszlop $q(\lambda)$-szorosát. Ekkor a j-dik oszlop első eleme $r(\lambda)$ lesz. A j-dik és első oszlop cseréjével $\underline{A}$-val ekvivalens mátrixot kapunk, melyiknél a bal felső sarokban $r(\lambda)$ áll. Ez ellentmond az $e_1(\lambda)$ választásának.

Így $r(\lambda) \equiv 0 \Rightarrow e_1(\lambda) \mid b_j(\lambda)$. Hasonlóan $e_1(\lambda) \mid c_k(\lambda)$ $k = 2 \dots n$.

Elemi átalakításokkal az $\underline{A}$-val ekvivalens $\begin{bmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (n-1)\times(n-1) & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$ mátrix adódik.

Teljes indukcióval adódik, hogy $\underline{A}$ ekvivalens egy $\begin{bmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & & \\ 0 & & \ddots & e_n(\lambda) \end{bmatrix}$ mátrixszal,

ahol $e_2(\lambda) \mid e_3(\lambda) \dots e_{n-1}(\lambda) \mid e_n(\lambda)$.

Megm., hogy $e_1(\lambda) \mid e_2(\lambda)$. $e_2(\lambda) = e_1(\lambda)\, g_*(\lambda) + r_*(\lambda)$

Ha $r_*(\lambda) \not\equiv 0 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} e_1(\lambda) & & & \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_n(\lambda) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} e_1(\lambda) & e_1(\lambda) q_*(\lambda) & 0 & \\ 0 & e_2(\lambda) & 0 & \\ \vdots & \vdots & e_3(\lambda) & \\ 0 & 0 & 0 & e_n(\lambda) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} e_1(\lambda) & e_1(\lambda) q_*(\lambda) & 0 & \dots \\ -e_1(\lambda) & r_*(\lambda) & 0 & \dots \\ & & \ddots & \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} r_*(\lambda) & \\ & \ddots \end{bmatrix}$$

26. előadás

2008. 11. 17.

8h

Az egyértelműség bizonyítása

Jelölje $d_k(\lambda)$, $k = 1, 2 \dots n$ az $\underline{A}$ λ-mátrix k-adrendű aldeterminánsainak legnagyobb közös osztóját.

Áll: λ-mátrix esetén a $d_k(\lambda)$ polinom elemi átalakítások során nem változik.

Így a $d_k(\lambda)$ polinomok az a mátrixnál ugyanazok, mint a (vele ekvivalens) kanonikus mátrix esetén.

A kanonikus mátrix $\begin{bmatrix} e_1(\lambda) & & & \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & e_r(\lambda) & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ – feltéve, hogy rang $\underline{A} = r$ (= rang kanonikus)

$$\Rightarrow d_1(\lambda) = e_1(\lambda)$$

$$d_2(\lambda) = e_1(\lambda)\, e_2(\lambda)$$

$$\vdots$$

$$d_r(\lambda) = e_1(\lambda)\, e_2(\lambda) \dots e_r(\lambda)$$

$$d_{r+1}(\lambda) = 0$$

$$\vdots$$

$$d_n(\lambda) = 0$$

Így $e_1(\lambda) = d_1(\lambda)$ $\quad e_3(\lambda) = \dfrac{d_3(\lambda)}{d_2(\lambda)}$ $\dots$ $e_r(\lambda) = \dfrac{d_r(\lambda)}{d_{r-1}(\lambda)}$

$e_2(\lambda) = \dfrac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}$ $\quad e_{r+1}(\lambda) = \dots = e_n(\lambda) = 0$

(P) $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{bmatrix}$ $\quad d_1(\lambda) = \text{lnko}\{2, 3, -\lambda, 1-\lambda\} = 1$

$d_2(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda-3)(\lambda-2)$

$\Rightarrow$ Kanonikus alak: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-3)(\lambda-2) \end{bmatrix}$

Tétel: Két mátrix (négyzetes) akkor és csak akkor hasonló, ha karakterisztikus mátrixait (mind λ-mátrix) ekvivalensek, azaz közös kanonikus alakkal rendelkeznek.

Legyen F egy test és $p(\lambda) \in F[\lambda]$ egy polinom, $p(\lambda) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Akkor mondjuk, hogy egy F test feletti $n \times n$-es $\underline{\underline{B}}$ mátrix gyöke a $p(\lambda)$ polinomnak, ha $a_n \underline{\underline{B}}^n + \dots a_1 \underline{\underline{B}} + a_0 E = \underline{0}$ teljesül.

Tétel: Minden $n \times n$-es $\underline{\underline{B}}$ mátrixhoz van olyan legalább elsőfokú $p(\lambda)$ polinom, melynek $\underline{\underline{B}}$ gyöke.

Biz: Az $n \times n$-es mátrixok n^2 dimenziós vektorteret alkotnak F felett. Így $E, \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{B}}^2, \dots, \underline{\underline{B}}^{n^2}$ n^2+1 elem ebben a vektortérben, ezért $\exists\, a_0, a_1, \dots, a_{n^2} \in F$, hogy $a_{n^2} \underline{\underline{A}}^{n^2} + a_{n^2-1} A^{n^2-1} + \dots + a_1 \underline{\underline{A}} + a_0 \underline{\underline{E}} = \underline{0}$, azaz $\underline{\underline{B}}$ gyöke a $p(\lambda) = a_{n^2} \lambda^{n^2} + \dots a_1 x + a_0$ legalább elsőfokú polinomnak.

Def: Egy $\underline{\underline{A}}$ mátrix minimális polinomján azt a ~~legalább~~ legkisebb fokszámú, legalább elsőfokú, 1 főegyütthatójú polinomot értjük, melynek $\underline{\underline{A}}$ gyöke.

Tétel: Tetsz. $\underline{\underline{A}}$ mátrix minimális polinomja megegyezik, a karakterisztikus mátrixával ekvivalens kanonikus mátrix utolsó invariáns faktorával, azaz $e_n(\lambda)$-val.

Megj. az $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \dots, e_n(\lambda)$ polinomokat invariáns faktoroknak nevezzük.

Tétel (Cayley-Hamilton-tétel)

$\forall$ (négyzetes) mátrix gyöke saját karakterisztikus polinomjának.

Biz: A karakt. polinom. $|\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}|$, ezért $[\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}]$ esetén $d_n(\lambda) = \underbrace{(-1)^n |\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}|}_{*}$

$$= \underbrace{e_1(\lambda)\, e_2(\lambda) \dots e_{n-1}(\lambda)}_{d_{n-1}(\lambda)}\, e_n(\lambda) = d_{n-1}(\lambda)\, m(\lambda)$$

$m(\lambda)$ az $\underline{\underline{A}}$ minimális polinomja.

$$* = (-1)^n k(\lambda)$$

$$(-1)^n k(\lambda) = d_{n-1}(\lambda)\, m(\lambda) \Rightarrow \boxed{(-1)^n k(\underline{\underline{A}}) = d_{n-1}(\underline{\underline{A}})\, m\, \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}}$$

$\square$

Jordan mátrixok:

Def: Egy F test λ_0 eleméhez tartozó k-adrendű Jordan-blokkon a

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \lambda_0 & 1 & \\ & & \lambda_0 & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

$k \times k$-es mátrixot értjük, azaz olyan mátrixot ahol a főátlóban $\forall$ elem λ_0-al, s a főátló feletti elemek egyenlők 1-el, a többi elem $= 0$.

(Pl)
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Def: Egy test elemeiből képzett Jordan mátrixok, olyan négyzetes mátrixot értünk amelyben a főátló mentén Jordan-blokkok helyezkednek el, a többi elem pedig 0.

(Pl)
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & & & 0 & \\ & & 5 & 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 5 & 1 & & & & & \\ & & 0 & 0 & 5 & & & & & \\ & & & & & 2 & & & & \\ & & & & & & 4 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & 0 & 4 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 4 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

26/4 Jordan-féle blokk karakt. mátrixának kanonikus alakja

$$\begin{bmatrix} \lambda_0-\lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda_0-\lambda & 1 & \\ & & \lambda_0-\lambda & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ & & & \lambda_0-\lambda \end{bmatrix}_{k\times k} \sim \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda-\lambda_0)^k \end{bmatrix}$$

$e_1(\lambda) = d_1(\lambda)$, $e_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)} = \frac{1}{1} = 1$ | $e_3(\lambda) = \frac{d_3(\lambda)}{d_2(\lambda)} = \frac{1}{1} = 1 \ldots e_k(\lambda) =$

Jordan mátrix karakt. mátrixának kanonikus alakja:

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} \lambda_1-\lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & & 1 \\ 0 & & & \lambda_1-\lambda \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} \lambda_2-\lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda_2-\lambda & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_2-\lambda \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} \lambda_t-\lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & & 1 \\ 0 & & & \lambda_t-\lambda \end{matrix} \end{bmatrix} \overset{\text{kanonikus alak}}{\sim}$$

$k_{1,1} \times k_{1,1}$

$k_{2,1} \times k_{2,1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & (\lambda-\lambda_1)^{k_{1,1}} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & (\lambda-\lambda_2)^{k_{2,1}} \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

azaz olyan mátrixot kapunk, amelynek a főátlóban egyesek valamint

$(\lambda-\lambda_1)^{k_{1,1}}, (\lambda-\lambda_1)^{k_{1,2}}, \ldots, (\lambda-\lambda_1)^{k_{1,q_1}}$

$(\lambda-\lambda_2)^{k_{2,1}}, (\lambda-\lambda_2)^{k_{2,2}}, \ldots, (\lambda-\lambda_2)^{k_{2,q_2}}$

$\vdots$

$(\lambda-\lambda_t)^{k_{t,1}}, (\lambda-\lambda_t)^{k_{t,2}}, \ldots, (\lambda-\lambda_t)^{k_{t,q_t}}$

polinomok állnak, a főátlón kívül minden elem = 0

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \overset{\text{kanonikus alak}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 \cdot (\lambda-\lambda_1)^{k_{1,q_1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{2,q_2}} \cdots (\lambda-\lambda_t)^{k_{t,q_t}} & & \\ & & & (\lambda-\lambda_1)^{k_{1,2}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{2,2}} \cdots (\lambda-\lambda_t)^{k_{t,2}} & \\ & & & & (\lambda-\lambda_1)^{k_{1,1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{2,1}} \cdots (\lambda-\lambda_t)^{k_{t,1}} \end{bmatrix} = \text{kanonikus alak.}$$

$k_{1,1} \geq k_{1,2} \geq \dots \geq k_{1,q_1}$

$k_{2,1} \geq k_{2,2} \geq \dots \geq k_{2,q_2}$ $\quad | \; q = \max\{q_1, q_2, \dots, q_t\}$

$\vdots$

$k_{t,1} \geq k_{t,2} \geq \dots \geq k_{t,q_t}$

Tétel: Két Jordan mátrix akkor és csak akkor hasonló, ha ugyanazokból a Jordan-blokkokból áll, s a mátrix esetleg csak a blokkok elhelyezésében különböznek.

Pl

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ hasonló

Tétel: Egy F test feletti mátrix akkor és csak akkor hasonló egy Jordan-mátrixhoz, ha karakt. mátrixa, első invariáns faktorainak ($e_n(\lambda)$) minden gyöke F-ben van (F felett lin. tényezői) polinomok hatványainak szorzatára bontható)

Tétel: Minden komplex elemű mátrix hasonló egy Jordan mátrixhoz.

Pl

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad [\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2}-\lambda \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \\ & \lambda^2+\lambda+1 \end{bmatrix}}_{\text{kanonikus alak}}$$

Pl

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}] = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda-6 \end{bmatrix}}_{\text{kanon.}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-3)(\lambda+2) \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda+2)(\lambda-3) \end{bmatrix}$ a $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ Jordan mátrix kanonikus alakja

Tétel: Egy mátrix akkor és csak akkor hasonló egy diagonális mátrixhoz, ha $e_n(\lambda)$-nak $\forall$ gyöke benne van az F alaptestben és $\forall$ gyök egyszeres.