$[a,b] \subset \bigcup_{e=1}^{k} I_{ie} \cup \bigcup_{j=1}^{m} J_{x_j}$ (Borel-tétel).

F: osztópontok I_{ie}, J_{x_j} intervallumok végpontja és $e=1,\dots,k$, $j=1,\dots,m$.

$\omega(f,F) = \sum_{i=1}^{M} \omega_i \Delta f_i = \sum' \omega_i \Delta J_i + \sum'' \omega_i \Delta J_i$.

$\sum'$-ben azok a J_i-k melyek I_{ie}-ben;

$\sum''$-ben -"- -"- J_{x_j}-ben.

$$\sum' \omega_i \Delta J_i \le (M-m) \sum' \lambda(I_{ie}) \le (M-m) \frac{\varepsilon}{2(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\sum'' \omega_i \Delta J_i \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum'' \Delta J_i \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\omega = \sum' + \sum' \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Példa: $R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, \text{ ha } x = \frac{p}{q};\ (p,q)=1. \\ 0, \text{ ha } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

$R(x)$ $\forall$ racionálisban szakad, és $\forall$ irracionálisban folytonos. Szakadási helyeinek száma megszámlálható $\Rightarrow$ Riemann-integrálható.

---

21. előadás XI 18

Integrál középtételek

Tétel: f folytonos $[a,b]$-n (Riemann-integrálható). Ekkor $\exists\ \xi\ [a,b]$-n: $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$.

Bizonyítás: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{minimum}}}{m} \le f \le \underset{\substack{\uparrow \\ \text{maximum}}}{M}$. Ekkor $m(b-a) \int_a^b m \le \int_a^b f \le \int_a^b M = M(b-a)$

Ekkor $m \le \frac{\int_a^b f}{b-a} \le M$. A Bolzano-tétel miatt $\exists \xi$, hogy $\frac{\int_a^b f}{b-a} = f(\xi)$

Tétel: $f, g \in C[a,b]$, $g \ge 0$ $[a,b]$-n. $\exists\ \xi \in [a,b] \ni \int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g$.

Bizonyítás: $m \leq f \leq M$, $m\,g(x) \leq (fg)(x) \leq M g(x) \rightarrow \int$ monoton.

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g \Rightarrow \quad m \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M +$$

+ Bolzano tétel.

<u>Tétel:</u> $f \geq 0$ monoton fogy, g folytonos. $\Rightarrow \exists \xi \in [a, b]$, hogy $\int_a^b fg = f(a) \int_a^\xi g(x)\,dX$.

Bizonyítás: fg Riemann-integrálható.

$$I = \int_a^b fg = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} fg = \underbrace{\sum_{k=1}^n \left(f(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} g\right.}_{\Sigma_1} + \underbrace{\left.\int_{x_{k-1}}^{x_k} \big(f(x) - f(x_k)\big) g(x) \right)}_{\Sigma_2} =$$

$$= \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

$$\Sigma_2 = \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)\big(f(x) - f(x_k)\big) \right| \leq \sup_{[a,b]} |g| \sum_{k=1}^n \sup_k |f(x) - f(y)|\, \Delta x_k <$$

$$< K \omega(f, F) \underset{\substack{\Uparrow \\ f \text{ integrálható}}}{\leq} \varepsilon \quad \forall \varepsilon : \exists F \text{ felosztás.}$$

$$\Sigma_1 = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \big[G(x_k) - G(x_{k-1}) \big] = f(x_0) G(x_1) - f(x_0) \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{G(x_0)} + f(x_1) G(x_2) - f(x_1) G(x_1) + \ldots$$

$$\left\lceil \text{Legyen } \int_{x_0}^{x} g(x) = G(x). \right\rfloor$$

$$+ f(x_{n-1}) G(x_n) - f(x_{n-1}) G(x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} G(x_k) \overset{\wedge 0,\ \text{mert } f \searrow}{\big[f(x_{k-1}) - f(x_{k}) \big]} + f(b) G(b).$$

G folytonos $\min_{[a,b]} G = m$; $\max_{[a,b]} G = M$

$$\underbrace{m \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{k-1}) - f(x_{k}) + m f(b)}_{\substack{\vee| \\ m \cdot f(a)}} \leq \Sigma_1 \leq M \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) - f(x_k) + M f(b) \leq M f(a)$$

$$m \le \frac{\Sigma_1}{f(a)} \le M.$$

$$I = \Sigma_1 + \underline{O}(\varepsilon) \qquad m - \varepsilon \le \frac{1}{f(a)} \le M + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

$$m \le \frac{\int_a^b fg}{f(a)} \le M$$ + Bolzano G-re: $\exists \xi$, hogy $G(x) = \frac{\int_a^b fg}{f(a)} \Rightarrow$

$$\int_a^b fg = f(a) \int_a^\xi g(x)\,dx.$$

Alkalmazások

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \rightarrow$$

Taylor-polinom: $T_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1-1}}{(2k+1)!}$

$$\int_0^1 T_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^1 x^{2k} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k+1)(2k+1)!}$$ Leibniz sor

$$\overset{\shortparallel}{\left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1}$$

$$H_n\left(\Sigma\right) \le \frac{1}{(2n+3)(2n+3)!}$$

$$H_n(f) = \left| T_n - \frac{\sin x}{x} \right| < \frac{1}{(2n+3)!}$$

$$\int_0^1 H_n = \int_0^1 \left| \frac{\sin x}{x} - T_n \right| \le \frac{1}{(2n+3)!}$$

Geometriai alkalmazások

(1) Terület: a) $\int_a^b f$ az f gráfja „alatti" előjeles terület.

b) $f: \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \qquad T = \int_\alpha^\beta y(t)\,\dot{x}(t)\,dt$

$$y = f(t); \quad x = g(t) \qquad y = f\left(g^{-1}(t)\right)$$

$$\int f\left(g^{-1}(t)\right) \cdot \frac{1}{g'\left(g^{-1}(t)\right)} = \int f$$

$\frac{f(x)}{g(x)}$

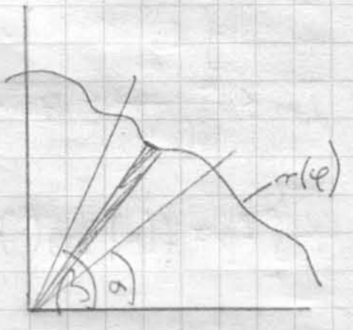
c) Polárkoordinátában:

Szektortartomány:

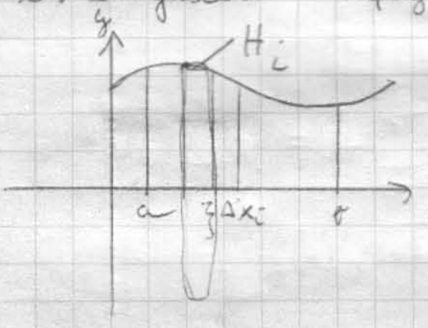
$$T_{\Delta i} = \frac{1}{2} r(\varphi_i)\, r(\varphi_i)\, \Delta\varphi_i .$$

$\alpha\ \cancel{k} = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta$ felosztás.

$$\sum_{i=1}^{k} T_{\Delta i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r^2(\varphi_i)\, \Delta\varphi_i \to \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi .$$



2) Forgástest térfogata:

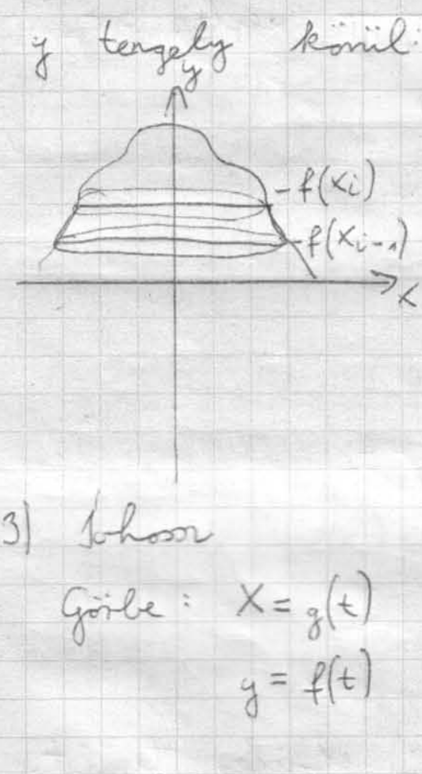


$$H_i = f^2(\xi_i)\pi \cdot \Delta x_i$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} H_i = \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\, \Delta x_i \to \pi \int_a^b f^2\, dx .$$

y tengely körül: $V_i = \xi_i^2 \pi \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) \sim \xi_i^2 \pi f'(\eta_i)\Delta x_i$

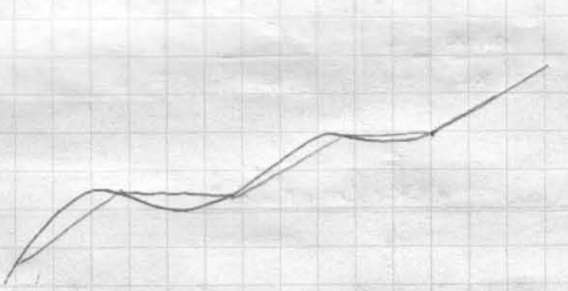
$$\to \pi \int_a^b x^2 f'(x)\, dx .$$



3) Ívhossz

Görbe: $x = g(t)$

$y = f(t)$



A görbe pontjait szakaszokkal közelítjük:

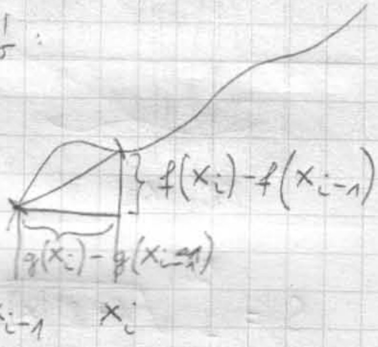
l_F: F felosztáshoz tartozó töröttvonal. Adott felosztást finomítva l_F hossza nő (Δ- egyenlőtlenség).

Definíció: $\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$ γ görbe rektifikálható, ha $\sup_F l_F$ véges.

Ekkor ez az $S(\gamma)$: a görbe ívhossza.

Példa: nem rektifikálható $\sin\frac{1}{x}$ $(0,1)$-en.

Ha f, g diffható, és f, g, f', g' intható:



$$l_F = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)^2 + \left(g(x_i)-g(x_{i-1})\right)^2} =$$

$$\Sigma \underset{4}{=} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'(\xi_i)^2 \Delta^2 x_i + g'(\eta_i)^2 \Delta^2 x_i} =$$

Lagrange-Középértéktétel $$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'(\xi_i)^2 + g'(\eta_i)^2}\ \Delta x_i$$

$$\text{diff} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'(\xi_i)^2 + g'(\xi_i)^2}\ \Delta x_i$$

$$|\sigma(f,F) - \Sigma| \leq \sum_{i=1}^{n} |g(\xi_i) - g(\eta_i)|\ \Delta x_i \leq \omega(g, F).$$

$$\Rightarrow \sigma\ \Sigma \to \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(x))^2 + (g'(x))^2}\, dx.$$

Ha a görbe explicit: $S(f) = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$

---

22. előadás

XI. 21.

Polárkoordinátás ívhossz:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$x = r(\varphi) \cos\varphi;$

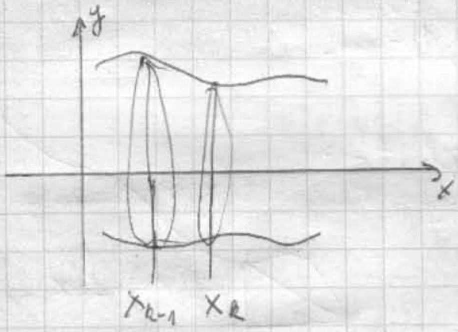
$y = r(\varphi) \sin\varphi$

$x' = r' \cos\varphi - r \sin\varphi$

$y' = r' \sin\varphi + r \cos\varphi$ $\quad \Rightarrow \quad x'^2 + y'^2 = r'^2 + r^2$

$$S(\gamma)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r'^2+r^2}.$$

4) Forgástest felszíne:



$$A_k=2\pi\,\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\,\Delta S_k$$

$$\sum_{i=1}^{n}A_i=2\pi\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta S_i$$

$$S_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sqrt{1+f'^2(x)}\underset{\uparrow}{=}\sqrt{1+f'^2(\eta_i)}\,\Delta x.$$

Integrál-középtétel

Ekkor $\sum_{i=1}^{n}A_i=2\pi\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\eta_i)}\sim 2\pi\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\to$

$$\to 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

b) paraméteresen: $x(t)\,;\,y(t)$

$$A=\int_a^b y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

Tétel (Cauchy - Schwarz): $f,g\in R[a,b]$. Ekkor

$$\left(\int_a^b fg\right)^2\le\int_a^b f^2\int_a^b g^2.$$

Bizonyítás: $0\le(\lambda f+g)^2\;\to\;0\le\int_a^b(\lambda f+g)^2=\lambda^2\int_a^b f^2+\int_a^b g^2+2\lambda\int_a^b fg$,

ez $P_2(\lambda)$.

$$0\le P_2(\lambda)\;\to\;D\le 0.$$

$$4\left(\int_a^b fg\right)^2-4\int_a^b f^2\int_a^b g^2\le 0$$

$$\left(\int_a^b fg\right)^2\le\int_a^b f^2\int_a^b g^2.$$

Megjegyzés: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \underset{\frac{\pi}{2}-x=y}{=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right) dy =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos y)\, dy.$$

Példa: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{u}{\sin^{n-1} x}\, \underset{v'}{\sin x} = \underset{\overset{\|}{0}}{\left[-\cos^2 x \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (n-1) \sin^{n-2} x \cos x =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x$$

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \ldots$$

$n = 2k$-ra: $\quad I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} I_0 \qquad I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 = \frac{\pi}{2}$

$n = 2k+1$-re: $\quad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} I_1 \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x = 1.$

$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin^{2n+2} x \le \sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{\pi}{2} \le \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\underset{\overset{\|}{\frac{1}{2n+2}}}{\frac{(2n)!!}{(2n+2)!!}} \cdot \frac{\pi}{2} \le \frac{(2n)!!^2}{(2n+1)!!^2} \le \underset{\overset{\|}{\frac{1}{2n+1}}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!!}} \frac{\pi}{2}$$

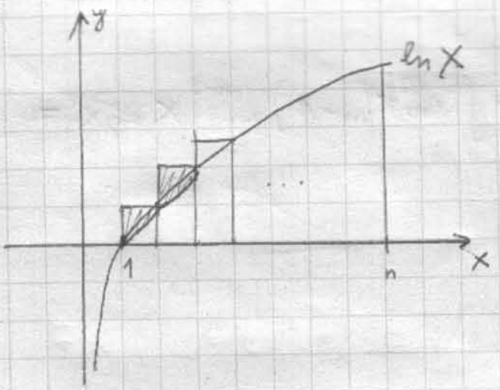
$$\frac{2n+1}{2n+2} \frac{\pi}{2} \le \frac{(2n)!!^2}{(2n-1)!!^2 (2n+1)} \le \frac{\pi}{2}.$$

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2n+2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \le \frac{(2n)!!}{(2n-1)!! \sqrt{2n+1}} \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ez a Wallis-formula:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Példa: $n! \overset{?}{\rightsquigarrow} n^n$ $\qquad \ln X = \log X$



$$\int_1^n \ln X \leq \sum_2^n \ln k = \ln n!$$

$$\leq \int_1^n \log X + \sum_1^n \text{háromszögek} =$$

$$= n\log n - n + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{(\log_k - \log_{k-1})\cdot \overset{1}{\cancel{k}}}{2} =$$

$$= n\log_n - n + 1 + \frac{1}{2}\log_n$$

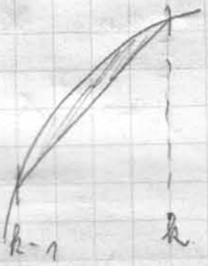
Ekkor $R_n = \sum_1^n \text{félholdak} = n\log n - n + 1 + \frac{1}{2}\log n - \log n!$

n nő, egyre több félhold: $R_n \nearrow$.

$R_n = \log\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{n!} + 1$

Megmutatjuk, hogy R_n korlátos.

$a_k = k.$ félhold területe



$$0 \leq \int_{k-1}^k \log X - \frac{\log k + \log(k-1)}{2}\cdot 1 =$$

$$= k\log k - k - (k-1)\log(k-1) + k - 1 -$$

$$- \frac{\log k + \log(k-1)}{2} = \log k^{k-\frac{1}{2}} - \log(k-1)^{k-\frac{1}{2}} - 1 =$$

$$= \log\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{e} = \log \frac{\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}}{e}\cdot\sqrt{\frac{k}{k-1}}.$$

Mivel ez pozitív, ezért $\log \frac{\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}}{e}\cdot\sqrt{\frac{k}{k-1}} > 1.$

$$\log\left(1 + \underbrace{\frac{\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}}{e}\sqrt{\frac{k}{k-1}} - 1}_{\acute{o}}\right) \leq \underbrace{\frac{\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}}{e}\sqrt{\frac{k}{k-1}} - 1}_{*}$$

$$* = \frac{\sqrt{\frac{k}{k-1}}}{e}\left(\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}\cdot 1 - e\sqrt{\frac{k-1}{k}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{k}{k-1}}}{e}\underbrace{\left[\left(\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}-e\right)+e\left(1-\sqrt{\frac{k-1}{k}}\right)\right]}_{[\,]}$$

$$[\,] = \underbrace{e\left(1-\sqrt{\frac{k-1}{k}}\right)}_{A} - \underbrace{\left(e-\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}\right)}_{B}$$

$$A = e\,\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} = e\,\frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})} = \frac{e}{2k} + e\left(\frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})} - \frac{1}{2k}\right).$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{\sqrt{k}}\left[\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} - \frac{1}{2\sqrt{k}}\right] =$$

$$= \frac{-\sqrt{k-1}}{k(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})} = \frac{1}{2k(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})^2} = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Tehát $A = \frac{e}{2k} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{k^2}\right).$

$$B = \overbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}}^{e} - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}\frac{1}{(k-1)^j} = 0 + \sum_{j=2}^{k-1}\left(1-\frac{(k-2)\cdots(k-j)}{(k-1)^{j-1}}\right)\frac{1}{j!} + \sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j!}.$$

$$\uparrow$$

$$\frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-j-1+1)}{(k-1)j(j-1)}\cdot\frac{1}{j!}$$

Volt: $\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j!} \le \frac{1}{k\cdot k} = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{k^2}\right).$

Kell: $\sum_{j=2}^{k-1}\frac{(k-1)^{j-1} - (k-1-1)(k-1-2)\cdots(k-1-(j-1))}{(k-1)^{j-1}}\cdot\frac{1}{j!} =$

$$= \sum_{j=2}^{k-1}\frac{(k-1)^{j-1} - \left[(k-1)^{j-1} + (-1-2-\ldots-(j-1))(k-1)^{j-2} + \underline{\underline{O}}\,(k-1)^{j-3}\right]}{(k-1)^{j-1}} =$$

$$= \frac{1}{k-1}\sum_{j=2}^{k-1}\underbrace{\frac{j(j-1)}{j!}}_{\frac{1}{(j-2)!}} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{k^2}\right) =$$ → többi együttható ömegerhető.

$$= \frac{1}{2(k-1)} \sum_{j=0}^{k-3} \frac{1}{j!}$$

Tehát: $A - B = \frac{e}{2k} - \frac{1}{2(k-1)} \sum_{j=0}^{k-3} \frac{1}{j!} + \underline{\underline{o}}\left(\frac{1}{k^2}\right) =$

$$= \underline{\underline{o}}\left(\frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{2}\left[\underbrace{e\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)}_{\underline{\underline{o}}\left(\frac{1}{k^2}\right)} + \frac{1}{k-1}\underbrace{\left(e - \sum_{j=0}^{k-3}\frac{1}{j!}\right)}_{\substack{\le \frac{1}{(k-2)(k-2)!} \\ \overset{=}{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)}}\right] = \underline{\underline{o}}\left(\frac{1}{k^2}\right),$$ azaz

$\exists\, C,\ C \neq C(k)$, hogy $\frac{\sqrt{\frac{k}{k-1}}}{e} \cdot (A - B) \le \frac{C}{k^2}$.

$$R_n \overset{*}{=} \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{k-1}^{k} \log x - \frac{\log k + \log(k-1)}{2}\right) \le \sum_{k=1}^{n} *_k \le c \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \infty + R_n \nearrow$$

$\Rightarrow R_n$ konvergens.

$R_n \to R\ ;\quad R_n - 1 \to R - 1.$

$$e^{R_n - 1} \to e^{R-1}$$
$$\shortparallel$$
$$b_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!} \to e^{R-1} = A.$$

Ha $b_n \to A$; akkor $\frac{b_n^2}{b_{2n}} \to \frac{A^2}{A} = A$

$$\frac{b_n^2}{b_{2n}} = \frac{\frac{n^{2n}}{e^{2n}} \cdot \frac{n}{n!^2}}{\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}} \cdot \frac{\sqrt{2n}}{(2n)!}} = \frac{(2n)!}{((2n)!!)^2} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}} =$$

$$= \underbrace{\frac{(2n-1)!!\sqrt{2n+1}}{(2n)!!}}_{\substack{\text{W-F}\ \downarrow \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{n}{2(2n+1)}}}_{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{2}}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$n! \underset{\uparrow}{\sim} \sqrt{2n\pi}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$ Stirling-formula.

aszimptotikusan
egyenlő

Improprius integrál

Riemann- korlátos intervallum + korlátos függvény

Improprius / intervallum nem korlátos
\ fv nem korlátos

Definíció: (I nem korlátos): Ha $f\in R[a,b]$ $\forall b>a$ és $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f$ $\exists$ létezik és véges, akkor $\int_a^\infty f$ improprius integrál konvergens, és $\int_a^\infty f=\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f$. Ha nem konvergens, divergens.

Példa: $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{\pi}{2}$.

Példa: $\int_1^\infty \frac{1}{x} = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\ln b - \ln 1\right) = \infty$ divergens.

Ha $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b = \pm\infty$, akkor az improprius integrál divergens, de értéke $\pm\infty$. Ha $\nexists \Rightarrow$ nincs értéke.

Definíció (függvény nem korlátos, $\lim\limits_{x\to a+}|f|=\infty$), $f\in R[a+\varepsilon,b]$ $\forall \varepsilon>0$. $\int_a^b f \overset{\text{imp}}{=} \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f$, ha $\nexists 0$ $\exists$ és véges a határérték.

Példa: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\left(2\sqrt{1}-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2$.

Példa: $\int_0^1 \frac{1}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\left(\ln 1 - \ln\varepsilon\right) = \infty$.

Megjegyzés: $\lim\limits_{x\to b-}|f|=\infty$; akkor $\int_a^b f = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f$.

$$\int_{-\infty}^{b} f = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f.$$

b) több „baj" → olyan részekre, ahol 1 baj van csak.

Példa: $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = \int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} + \int_{1}^{\infty}$.

c) Ha pl. $\int_{-\infty}^{\infty} x = \int_{-\infty}^{0} x + \int_{0}^{\infty} x = \lim_{a\to-\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{\left(0-\frac{a^2}{2}\right)} + \lim_{b\to\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{\left(\frac{b^2}{2}-0\right)}$ divergens (ha csak 1 db divergens, akkor divergens).

De: $\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} x = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{b^2}{2}\right) = \lim 0 = 0 \Leftarrow$ Cauchy-féle főérték.

Véges intervallumon: pl. $\frac{1}{x}$.

$$\lim_{a\to 0}\left(\int_{-1}^{-a} \frac{1}{x} + \int_{a}^{1} \frac{1}{x}\right) = \ln|-a| + \ln|-1| + \ln 1 - \ln a = 0.$$

Megjegyzés: $f \to F$ primitív függvénye.

$$\int_{a}^{\infty} f = \lim_{x\to\infty}\left(F(x)-F(a)\right);$$

$f\to\infty$: $x\to a^+$

$$\int_{a}^{b} f = F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Tétel (Cauchy): a) $\int_{a}^{\infty} f$ improprius integrál konvergens $\Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists M$, hogy $x_1, x_2 > M$ esetén $\left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| < \varepsilon$.

b) $\lim_{x\to a^+} |f| = \infty$ $\int_{a}^{b} f$ improprius integrál konvergens $\Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists \delta$, hogy $\forall\ x_1, x_2 \in (a, a+\delta)$ esetén $\left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| < \varepsilon$.

Segédtétel: $\alpha =$ – valós
$\alpha^{\pm}$
$\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists$ α-nak olyan $\dot{U}$ környezete, hogy minden $x_1, x_2 \in \dot{U}$ esetén $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Bizonyítás: $\Rightarrow \frac{\varepsilon}{2}\ \exists\ \dot{U}$ környezete α-nak, hogy $\forall x \in \dot{U}$: $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$; $x_1, x_2 \in \dot{U}$: $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - A| + |f_2(x_2) - A| < \varepsilon$.

$\Leftarrow$ Megmutatjuk, hogy $\forall \{x_n\} \subset D_f$ $x_n \neq \alpha$, $n \in \dot{U}$ $x_n \to \alpha$ esetén $f(x_n)$ konvergens: ugyanis legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, $\varepsilon \to \dot{U}_\varepsilon$ (α környezet) ~~Ha~~ $\exists M$ küszöbindex, hogy $n > M$-re $x_n \in \dot{U}$, akkor $\forall\ n, m > M$-re: $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$, vagyis $f(x_n)$ Cauchy $\Rightarrow$ konvergens. $\square$

Megjegyzés: $f(x_n')$ és $f(x_n'')$ ugyanoda tart, mert pl. ha $f(x_n') \to A$ és $f(x_n'') \to B$, akkor $\{x_n\}$ legyen (x_n') és (x_n'') összefésülése, ez is konvergens, de az indirekt feltétel szerint van két különböző torlódási pontja.

Bizonyítás (tétel): $F(x) = \int_a^x f$, $\int_a^\infty$ konvergens az előző tétel szerint $\Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists M$; hogy $\forall x_1, x_2 > M$: $\varepsilon > |F(x_1) - F(x_2)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f\right|$.

Következmény:

Majoráns kritérium: $\int_I f$ (improprius) integrál konvergens, és I-n $|g| \leq f \Rightarrow \int_I g$ is konvergens.

Bizonyítás: ε : $\exists M, \delta$: $\varepsilon > \int_{x_1}^{x_2} f > \int_{x_1}^{x_2} |g| \geq \left|\int_{x_1}^{x_2} g\right|$.

Minoráns kritérium: $|g| \leq f$ és $\int g$ divergens, akkor

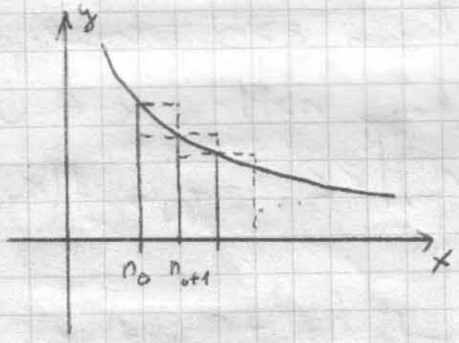
$\int f$ is divergens.

Példa: $\int_1^\infty e^{-x^2} \le \int_1^\infty e^{-x} = \left[-e^{-x}\right]_1^\infty = \frac{1}{e}$ ⇒ konvergens

Integrálkritérium numerikus sorokra

Tétel: $f \searrow (n_0, \infty)$ és itt $f \ge 0$. Ekkor $\int_{n_0}^\infty f(x)\,dx$ és $\sum_{k=n_0}^\infty f(k)$ improprius integrál és numerikus sorok ekvikonvergensek.

Bizonyítás:



$$\sum_{n_0+1}^\infty f(k) \le \int_{n_0}^\infty f \le \sum_{n_0}^\infty f(k).$$

Alkalmazás:

$$\sum_2^\infty \frac{1}{n\ln n} \quad \text{illetve} \quad \int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_2^\infty \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \left[\ln\ln x\right]_2^\infty = \infty$$

Definíció: $\int_i f$ improprius integrál abszolút konvergens, ha $\int_i |f|$ improprius integrál konvergens.

Megjegyzés: Abszolút konvergens ⇒ konvergens, ugyanis ha

$$\varepsilon > \int_{x_1}^{x_2} |f| \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-egyenlőtlenség}}}{>} \left| \int_{x_1}^{x_2} f \right|$$

Példa: Konvergens, de nem abszolút konvergens:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^\infty \underbrace{\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x}}_{a_n} = \sum_{n=1}^\infty a_n$$

$$|a_n| = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} \Rightarrow |a_n| \le \frac{1}{(n-1)\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x| =$$

$$= \frac{1}{(n\mp 1)\pi} \int_0^{n} \sin x = \frac{2}{(n\mp 1)\pi}, \quad \text{hasonlóan} \quad \frac{2}{n\pi} \le a_n \le \frac{2}{(n\mp 1)\pi}.$$

Tehát $|a_n| \searrow 0$ és a_n alternál $\Rightarrow \sum a_n$ konvergens, mert Leibniz.

És ugyanígy $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \sum_1^\infty \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} = \sum_1^\infty |a_n| \ge \frac{2}{n} \sum \frac{1}{n} = \infty.$

$$/ \int_1^\infty \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} = \cos 1 + I_1; \quad |I_1| \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2} < \infty /$$

<u>Példa</u>: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) + \ln(\cos x) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x - \ln 2$

Volt: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)$

$$\frac{\pi}{4} \ln 2 + I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \ln \sin y \overset{\substack{2x=y \\ dx=\frac{1}{2}dy}}{=}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin y \, dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin y \, dy \right) = * \qquad y = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \underbrace{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$$

$$* = \frac{1}{4} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x = \frac{1}{2} I \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Probléma: $\int_a^\infty f$ konvergens $\overset{?}{\Rightarrow} \lim_{x\to\infty} f = 0.$

Válasz: a) Ha $\lim_{x\to\infty} f = A \Rightarrow A = 0.$

b) $\int_0^\infty \sin x^2 \underset{\substack{x^2=y \\ x=\sqrt{y} \\ dx=\frac{1}{2}\sqrt{y}}}{=} \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{y}} \sin y \, dy$

Előbbi becslés: $\frac{1}{4\sqrt{n+1}\,\pi} < |a_n| < \frac{1}{4\sqrt{n}\,\pi}$

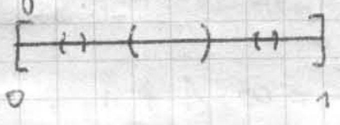
Ult: f' $\exists$ de nem intható.

$$[0,1]\text{-en: } \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin\frac{1}{x} \\ 0 \end{cases} \text{ deriváltja } = \begin{cases} \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \sin x + x^{\frac{3}{2}} \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right). \\ 0 \end{cases}$$

Ennek azért abszolút konvergens az improprius integrálja: $\int_0^1 |f'| \le \frac{3}{2}\int_0^1 \sqrt{x} + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} < \infty.$

<u>Példa</u>: f deriváltja korlátos, de $f' \notin R[a,b]$.

Legyen: E:



1. $|s_1| = \frac{1}{4}$

2. 2db $\frac{1}{8}$ összhosszú középső nyíltakat

⋮

k. 2^{k-1} db $2^{\frac{1}{k+1}}$ összhosszú

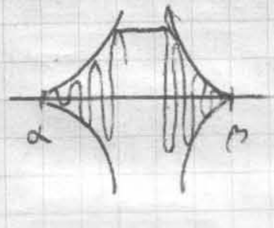
A maradék: E.

$$|E| = 1 - \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{nem } \lambda\text{-0 mértékű halmaz}$$

Legyen $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\phi(x) = 0 \quad x \in E$

$x \notin E$: $x \in (\alpha, \beta)$ amit kihagytunk



x α-hoz közel: $\phi(x) = (x-\alpha)^2 \sin\frac{1}{x-\alpha}$ x α-hoz közel

x β-hoz közel: $\phi(x) = (\cancel{x}\beta - x)^2 \sin\frac{1}{\beta x}$ x β-hoz közel

Közötte diffhatóan összekötöm.

$\phi'(x_0)$ $x_0 \in E$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{0-0}{x-x_0} = 0, \text{ ha } x \in E.$$

Ha pl. bal végpontja egy kihagyottnak, akkor:

$$\lim_{x\to x_0+}\frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{(x-\alpha)^2\sin\frac{1}{x-\alpha}-0}{x-\alpha}\leq\lim_{x\to x+}x-\alpha=0.$$

Tehát ha $x_0\in E$, akkor $\phi'(x_0)=0$.

Egyébként $x_0\in(\alpha,\beta)$, pl. α-hoz közelebb:

$$\phi'(x_0)=2(x-\alpha)\sin\frac{1}{x-\alpha}-\cos\frac{1}{x-\alpha}\Rightarrow\lim_{x\to\alpha}\nexists.$$

Tehát ϕ' E minden pontjában szakad, de E nem λ-0 mértékű $\Rightarrow\phi'\notin R[0,1]$, de ϕ' korlátos.

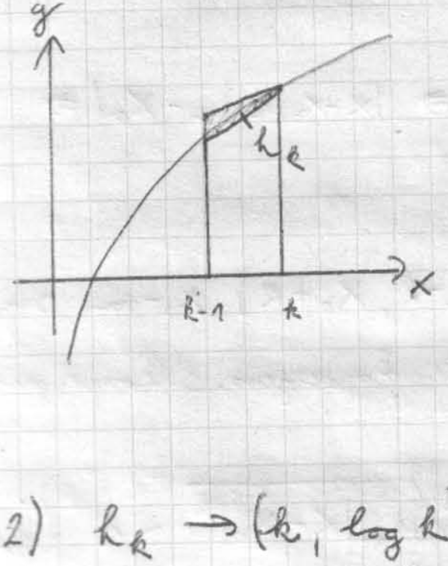
HF: 1. Számítsuk ki: (december 9-re

$$\int_0^{\pi}x\ln(\sin x)\,dx.$$

2. a) Konvergens-e: $\int_0^{\infty}x^2\cos(e^x)\,dx$.

b) Milyen p-re, q-ra lesz konvergens illetve abszolút konvergens $\int_0^{\infty}x^p\sin(x^q)\,dx$.

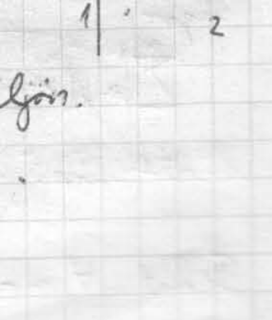
3. Σ felhold konvergens: $S=\sum_2^{\infty}\left(\int_{k-1}^{k}\log x-\frac{\log k+\log(k-1)}{2}\right)$.



h_k: 1 { $(k-1,\log(k-1))$, $(k,\log k)$ szelő

2 { k-ban a $\log x$ érintője

3 { $x=k-1$ egyenes.



2) $h_k\to(k,\log k)$ pont $(2,\log 2)$-be kerüljön.

Biz. be: $x_1\leq e_1\leq x_2\leq e_2\leq x_3\leq e_3\leq\dots$.

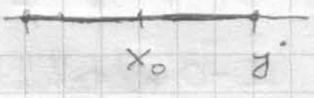
3) $\Sigma\Delta\leq\log 2$.

Hatványsorok

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ x_0 közepű hatványsor

fix x-ben numerikus sor: végtelen összeg, mint sorösszeg értendő

Állítás: Ha $\sum_0^{\infty} a_k(y-x_0)^k$ konvergens $\Rightarrow \forall x,\ |x-x_0|<|y-x_0|$, $\sum_0^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ konvergens.



Következmény: Ha $\sum a_k(x-x_0)^k$ hatványsor konvergenciahalmaza: $x\in\mathbb{R}$, amire $S(x)$ konvergens. Mindig intervallum.

Bizonyítás: $\sum a_k(y-x_0)^k$ konvergens $\Rightarrow |a_k(y-x_0)^k|<M$.

$|x-x_0|<|y-x_0| \Rightarrow \left|\frac{x-x_0}{y-x_0}\right| = q<1$.

$$S(x)=\sum_0^{\infty} a_k(x-x_0)^k=\sum_0^{\infty} a_k(y-x_0)^k\cdot\left(\frac{x-x_0}{y-x_0}\right)^k.$$

Megmutatjuk, hogy $S(x)$ abszolút konvergens:

$$\sum|a_k(x-x_0)^k| \le M\sum_{k=0}^{\infty} q^k<\infty$$

Megjegyzés: $\sum a_k(y-x_0)^k$ konvergens $\Rightarrow |x-x_0|<|y-x_0| \Rightarrow$ $\sum a_k(x-x_0)^k$ abszolút konvergens.

Probléma: Konvergenciahalmaz: $(x_0-R,\ x_0+R)$ x_0-ra szimmetrikus intervallum. $R=?$, amire ez konvergens. Konvergenciasugár.

$\sum_0^{\infty}|a_k(x-x_0)^k|<\infty$, ha $\limsup\sqrt[k]{|a_k||x-x_0|^k}<1$ (gyökkritérium: $\limsup\sqrt[k]{|a_k|}\cdot\underbrace{|x-x_0|}_{r}<1$.

Tehát $\forall\, r$-re konvergens, amire $r<\frac{1}{\limsup\sqrt[k]{|a_k|}}$.

Ha $|x-x_0| > \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$: $\limsup \sqrt[k]{|a_k||x-x_0|^k} > 1 \Rightarrow \infty$ sok

indexre $|a_k||x-x_0|^k > 1 \Rightarrow a_k(x-x_0)^k \not\to 0$: a sor divergens.

R konvergenciasugár tehát: $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$.

(x_0-R, x_0+R) -en S konvergens,
$|x_0-x| > R$ divergens,
$x_0 \pm R$- ben nem tudni.

Példa: e^x. $T_n(0, e^x) = \sum_0^n \frac{x^k}{k!}$

fix x-ben $\lim_{n\to\infty} T_n(0, e^x) = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}$

Probléma: $S(x) = \sum_0^\infty a_k x^k$ x-ben folytonos-e, diffható-e, integrálható-e, ha pl. n-szer diffható, akkor $T_n(0, \sum_0^\infty a_k x^k) = \sum_0^n a_k x^k$?

Példa: Mi van, ha formálisan deriválok, integrálok?

1) $e^x = T_n(0, e^x) + L_n$

$$|L_n| \le \sup_{|x|<M} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} M^{n+1} \le \frac{e^M \cdot M^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty;\ M \text{ fix}}{\to} 0.$$

Sőt $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{\frac{1}{k!}}} = \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \infty$. $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$-en konvergens a sor,

és minden x-ben előállítja a függvényt.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_1^\infty \frac{k \cdot x^{k-1}}{k!} = \sum_1^\infty \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!} = e^x = (e^x)'.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^k}{k!}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{k+1}}{\underbrace{(k+1)k!}_{(k+1)!}} = \sum_1^\infty \frac{x^k}{k!} = e^x - 1 = \int_0^x e^t\,dt.$$

Megjegyzés: $\sum_0^\infty a_k x^k$ konvergenciasugara R:

$$\sum_{1}^{\infty} k a_k x^{k-1}:$$

$$R' = \frac{1}{\limsup \sqrt[k-1]{k|a_k|}} = \frac{1}{1 \cdot \limsup \sqrt[k]{|a_k|}} = R.$$

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}$$

$$\hat{R} = \frac{1}{\limsup \sqrt[k+1]{\frac{|a_k|}{k+1}}} = R.$$

<u>Állítás</u>: Elég $\sum a_k x^k$-ra.

$S(x) = \sum_{0}^{\infty} a_k x^k$, R konvergenciasugár: $(-R, R)$-en belül $S(x)$ folytonos függvénye x-nek.

Bizonyítás: $x, x_0 \in \mathbb{R}$. Jelölés: $S_n(x) = \sum_{0}^{n} a_k x^k$

$$|S(x) - S(x_0)| = \overset{\text{I.}}{|S(x) - S_n(x)|} + \overset{\text{II.}}{|S_n(x) - S_n(x_0)|} + \overset{\text{III.}}{|S_n(x_0) - S(x_0)|}$$

<u>Ismétlés</u>: $|S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{n+1}^{\infty} a_k x^k\right| \leq \sum_{n+1}^{\infty} |a_k x^k| \underset{\substack{\uparrow \\ |x|<R:\ \exists q}}{<} (M)\sum_{n+1}^{\infty} q^k = M\frac{q^{n+1}}{1-q} \to 0.$

$$x < \varrho < R_1 < R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$$

$$\sum |a_k x^k| \leq a_k R_1^k \underbrace{\left(\frac{\varrho}{R_1}\right)}_{q}^k$$

Ekkor $\frac{\varepsilon}{3}$: $\exists n_0$, I, III $< \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall n > n_0$: $n > n_0$ fix.

$|S_n(x) - S_n(x_0)| = |\text{polinom}(x) - \text{polinom}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, ha $\delta < \delta(\varepsilon)$.

$\forall \varepsilon: \exists \delta: |S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$, ha $|x - x_0| < \delta$.

<u>Állítás</u>: $f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_k x^k$; $g(x) = \sum_{1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$. Ekkor $f'(x) = g(x)$.

Bizonyítás:

$$\text{~~lim~~}\quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sum_1^\infty a_k(x+h)^k - \sum_1^\infty a_k x^k}{h} =$$

$$= \sum_1^\infty a_k \frac{(x+h)^k - x^k}{h} = \sum_1^\infty a_k \frac{\cancel{x+h-x}}{\cancel{h}} \underset{\substack{\shortparallel \\ g(x,h)}}{\left((x+h)^{k-1} + (x+h)^{k-2}x + \dots + x^{k-1}\right)}.$$

Ha $x, x+h \in (-R, R)$, megmutatjuk, hogy jobb oldal abszolút konvergens h-tól függetlenül. $x, h > 0$

$$|g(x,h)| < \sum_0^\infty |a_k|\, k\, (x+h)^{k-1} \le \sum_0^\infty k \underset{\substack{\uparrow \\ q \text{ mint előbb.}}}{q^k} < \infty$$

Tehát JO abszolút konvergens.

$g(x,h)$ értelmes, $x, x+h \in (-R,R)$, és megmutatjuk, hogy $h=0$ ban folytonos.

$$|g(x) - g(x,h)| \le \underbrace{|g(x) - g_n(x)|}_{\text{„farka kicsi" ha } n \text{ nagy}} + \overset{\text{folytonos (polinom)}}{|g_n(x) - g_n(x,h)|} + \underbrace{|g_n(x,h) - g(x,h)|}_{\text{„farka kicsi" ha } n \text{ nagy}} = *$$

$\varepsilon \to n$, $g_n \to \delta\,|$ így $* \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Ekkor $\lim_{h\to 0} \text{BO } f'(x) = \lim_{h\to 0} \text{JO} = \lim_{h\to 0} g(x,h) \underset{\uparrow}{=} g(x)$.

$$g(x,h) = \sum_1^\infty a_k\big[\underbrace{(x+h)^{k-1} \cdots x^{k-1}}_{\substack{\downarrow \\ k\cdot x^{k-1}}}\big].$$

Következmény: $T_n\left(0, \sum_0^\infty a_k x^k\right) = \sum_0^n a_k x^k$, ugyanis az előző tételt n-szer alkalmazva: $f^{(l)}(x)\big|_0 = \sum_{k=l}^\infty a_k\, k(k-1)\cdots(k-l+1)x^{k-l}\big|_0 =$

$= a_l \cdot l! \Rightarrow \frac{f^{(l)}(0)}{l!} = a_l$.

Megjegyzés: $\sum a_k x^k$ $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ a függvény Taylor-sora.

Példa: $e^x = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}$

$$\sin x = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_0^\infty \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_0^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Megjegyzés: $f(x) = \sum_0^\infty a_k x^k$. $\left| f(x) - s_n(x) \right| \le \sum_{n+1}^\infty |a_k x^k| \le M \sum_{n+1}^\infty q^k < \varepsilon$

$[-R_1, R_1]$-en $\quad s_n(x) - \varepsilon \le f(x) \le s_n(x) + \varepsilon$.

Ekkor az integrálközelítő összegek:

$$s(s_n - \varepsilon, F) \le s(f, F) \le S(f, F) \le S(s_n + \varepsilon, F). \qquad [-R_1, R_1] \vee [a,b] \subset [-R,R]$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_a^b s_n - \varepsilon(b-a) \qquad\qquad \int_a^b s_n + \varepsilon(b-a)$$

Ez azt jelenti, hogy $S(f,F) - s(f,F) < S(s_n + \varepsilon, F) - s(s_n - \varepsilon, F) \le$
$\le 2\varepsilon(b-a) + \varepsilon(b-a) = 3\varepsilon(b-a)$.

↖ oszcillációs összeg

Vagyis f Riemann-integrálható.

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b s_n \right| = \left| \int_a^b f - \sum_0^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| < \varepsilon(b-a).$$

$\sum \to 0$, $n \to \infty$: $\int_a^b f = \sum_0^\infty a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

Példa: arctg x Taylor sora: ?

$$f' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_0^\infty (-x^2)^k = \sum_0^\infty (-1)^k x^{2k}.$$

$$|-x^2| < 1$$

Tehát $f = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \operatorname{arctg} x.$

Példa: Cauchy-szorzat $\sum_0^\infty a_k x^k \sum_0^\infty b_k x^k = \sum_0^\infty \sum_{l=0}^k a_l x^l b_{k-l} x^{k-l} =$

$$= \sum_{k=0}^\infty x^k \underbrace{\sum_{l=0}^k a_l b_{k-l}}_{c_k}$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_0^\infty a_k x^k$$

$$\sum_0^\infty a_k x^k \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\underset{\underset{c_0}{\|}}{a_0} + \underset{\underset{c_1}{\|}}{a_1} + \underset{\underset{c_2}{\|}}{\underbrace{a_2 + \dots - \frac{a_0}{2!}}} + \dots +$$

$$a_0 = c_0 = 0$$

$$a_1 = c_1 = 1$$

$$a_2 - 0 = c_2 = 0$$

---

25. előadás

XII. 5.

Binomiális sor

$$(1+x)^\alpha$$

Taylor-sor 0 körül: $\left((1+x)^\alpha\right)^{(k)}\Big|_0 = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}\Big|_0 =$

$$\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1).$$

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$(1+x)^\alpha \sim \sum_0^\infty \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Hol konvergens?

Volt: $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \limsup \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Ha $\exists$ $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$.

$$R = \frac{1}{\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim \left| \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} \right| = \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(n+1)!}{n!\,\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1-1)} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1. \Rightarrow \forall\ |x|<1\text{-re}$$ abszolút konvergens.

Probléma: $\sum_0^\infty \binom{\alpha}{k} x^k$ konvergens, $\overset{|x|<1.}{}$ kérdés: előállítja-e a függvényt?

<u>Példa</u>: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} \overset{\frac{1}{x}=y}{=} \lim_{y\to\infty} y e^{-y^2} = 0$$

$f'(0) = 0$; ha $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$f''(0) = \lim_{y\to\infty} 2y^4 e^{-y^2} = 0$, stb...

Teljes indukcióval igazolható, hogy $f^{(n)}(0) = 0$.

Emiatt a 0 pontban: $\sum_0^\infty \frac{0}{k!} \cdot x^k \equiv 0$.

Ha $x \neq 0 \Rightarrow T_n(x) \not\to f(x)$.

$(1+x)^\alpha = T_{n-1} + L_{n-1} \Rightarrow 0<x<q<1: |L_{n-1}| = \left| \frac{f^{(n)}\xi\, x^n}{n!} \right| =$

$$= \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+\xi)^{\alpha-n}}{n!} x^n \right| = \frac{|\alpha x|}{1} \cdot \frac{|(\alpha-1)x|}{2} \cdots \left| \frac{\alpha-n+1}{n} x \right| \cdot$$

$$\cdot (1+\xi)^{\alpha-n} \le \overbrace{\frac{|\alpha x|}{1} \cdot \left| \frac{\alpha-NM}{N} \right|}^{C(N)} \cdot \underset{\to 0}{q^{n-1-N}} \cdot 1.$$

$\underset{1}{\overset{4}{\text{|\!\wedge}}}$ $\left| \frac{\alpha-k+1}{k} \right| \to 1$, $k\to\infty$; $x<q$: $\exists N: k>N: \left| \frac{\alpha-k+1}{k} x \right| < q < 1$

Legyen most $-1<x<0$ $\{-1<q<x<0)$

Cauchy-féle maradéktag: $(1+x)^{\alpha}=T_{n-1}+C_{n-1}$

$$C_{n-1}=\frac{f^{(n)}(\Theta x)\cdot x^{n}}{(n-1)!}\cdot(1-\Theta)^{n-1}.$$

$$|C_{n-1}|=\left|\frac{\alpha x}{1}\right|\left|\frac{(\alpha-1)x}{1}\right|\cdots\left|\frac{(\alpha-n+1)x}{(n-1)!}\right|\cdot(1+\Theta x)^{\alpha-n}(1-\Theta)^{n-1}=$$

$$=\underbrace{\left|\frac{\alpha x}{1}\right|\cdot\left|\frac{(\alpha-1)x}{1}\right|\cdots\left|\frac{\alpha-n+1}{(n-1)!}x\right|}_{\text{mint az előbb}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ \text{szám}}}{(1+\Theta x)^{\alpha-1}}\left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta x}\right)^{n-1}$$

$x<0$-nál $\frac{1-\Theta}{1+\Theta x}<1$

Ez jó $x>0$-ra is.

ξ és Θ n-től függ

A konvergenciaintervallum határai

Példa

		1-ben	-1-ben
$\sum_0^{\infty} x^n$	$R=1.$	$\sum_0^{\infty} 1^n=\infty$;	$\sum_0^{\infty}(-1)^n$ divergens.
$\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}x^n$	$R=1$	$\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$;	$\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konvergens
$\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$	$R=1$	$\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$;	$\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}<\infty.$

A határokon meg kell vizsgálni a konvergenciát.

Állítás: a) $\alpha>-1$ 1-ben konvergens, azaz $\sum_0^{\infty}\binom{\alpha}{k}=(1+1)^{\alpha}=2^{\alpha}$;

b) $\alpha\leq-1$, $\sum_0^{\infty}\binom{\alpha}{k}$ divergens (1-ben)

c) $\alpha>0$, -1-ben konvergens, azaz $\sum_0^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}=(1-1)^{\alpha}=0.$

$\left(\alpha=0:\ \sum_0^{\infty}(-1)^k\binom{0}{k}=(1+1)^0=1\right)$

d) $\alpha<0$, -1-ben divergens. $\sum_0^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}$

Bizonyítás: a) $\alpha > -1$.

Megmutatjuk, hogy $\binom{\alpha}{k} \to 0$, ugyanis $2^{\alpha} = T_{n-1}(1) + L_{n-1}(1)$

$$L_{n-1}(1) = \binom{\alpha}{n}(1+\xi)^{\alpha-n} \quad (1>\xi>0).$$

$$\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}}\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = \frac{k+1-(\alpha+1)}{k+1} = 1-\frac{\alpha+1}{k+1}.$$

Tehát $\left|\binom{\alpha}{k+1}\right| = \left(1-\frac{\alpha+1}{k+1}\right)\left|\binom{\alpha}{k}\right|$. $1-\varrho x \le e^{-\varrho x}$, és $\ln(1+x) \le x$:

$$1-\varrho x \le e^{-\varrho x} \le e^{-\varrho \ln(1+x)} = \frac{1}{(1+x)^{\varrho}}.$$

$$1-\frac{\alpha+1}{k+1} \le \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{\alpha+1}} = \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{\alpha+1}.$$

Ekkor:

$$\left|\binom{\alpha}{k+\nu}\right| \le \left(\frac{k+\nu}{k+\nu+1}\right)^{\alpha+1}\left|\binom{\alpha}{k+\nu-1}\right| \le \left(\frac{\cancel{k+\nu}}{k+\nu+1}\cdot\frac{k+\nu-1}{\cancel{k+\nu}}\right)^{\alpha+1}\left|\binom{\alpha}{k+\nu-2}\right|\cdots$$

$$\le \underset{\substack{\Downarrow \\ 0, \\ \text{mert } \alpha>-1.}}{\left(\frac{k+1}{k+\nu+1}\right)^{\alpha+1}}\left|\binom{\alpha}{k}\right|. \quad k \text{ fix, } \nu\to\infty \quad \Rightarrow \quad \binom{\alpha}{k} \to 0.$$

Tehát $L_{n-1}(1) \to 0$. ✓

b) $\alpha < -1$: $\binom{\alpha}{k} = \frac{\overset{\overset{1}{\wedge}}{|\alpha|}\,\overset{\overset{2}{\wedge}}{|(\alpha-1)|}\cdots\overset{\overset{k}{\wedge}}{|(\alpha-k+1)|}}{1\cdot 2\cdots k} > \frac{k!}{k!} = 1.$

$a_n \not\to 0$: $\sum a_n$ divergens.

c) HM $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha}{k} = (-1)^n\binom{\alpha-1}{n}$. Teljes indukcióval:

$n = 0$-ra ✓

$$S_{n+1} = \underbrace{(-1)^n\binom{\alpha-1}{n}}_{\text{indukciós feltétel miatt}} + (-1)^{n+1}\binom{\alpha}{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}\left(\alpha(\alpha-1\cdots\overset{\alpha-n}{(\alpha-(n+1)+1)}\right.}{(n+1)!} -$$

$$-\frac{(\alpha-1)\cdots\overset{\alpha-n}{(\alpha-n+1)}(\alpha+1)}{(n+1)!}=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(\alpha-1-n)=$$

$$=(-1)^{n+1}\binom{\alpha-1}{n+1}^{\alpha+1}.$$

Ha $\alpha-1>-1 \Leftrightarrow \alpha>0.$

$$\overset{a)}{\Downarrow}$$

$$\binom{\alpha-1}{n}\to 0 \quad =(-1)^n S_n \Rightarrow S_n\to 0.$$

d) $\alpha<0: \quad \alpha-1<-1: \underset{\underset{|S_n|}{\parallel}}{\left|\binom{\alpha-1}{n}\right|}>1 \not\to 0.$

$\alpha<0$:

$$S_n=(-1)^n\binom{\alpha-1}{n}=(-1)^n\frac{\overbrace{(\alpha-1)\cdots(\alpha-1-n+1)}^{n \text{ tényezős}}}{n!}=\overset{\overset{1}{\parallel}}{(-1)^{2n}}\frac{(1+|\alpha|)(2+|\alpha|)\cdots(n+|\alpha|)}{n!}=$$

$$=\left(1+\frac{|\alpha|}{1}\right)\left(1+\frac{|\alpha|}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{|\alpha|}{n}\right)=$$

$$=e^{\log(\ )(\ )(\ )}=e^{\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{|\alpha|}{k}\right)}\geq e^{\frac{1}{2}|\alpha|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\to\infty.$$

Megjegyzés: $f(x)\sim\sum_0^\infty a_k x^k$, akkor $f(x^m)\sim\sum_0^\infty a_k x^{km}$

$$\left(\left(f(x^m)\right)^{(\ell)}\Big|_0=\left(m f'(x^m)x^{m-1}\right)^{(\ell-1)}\Big|_0\right)$$

Alkalmazás

Példa: $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_0^\infty\binom{-\frac{1}{2}}{k}x^k=\sum_0^\infty(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k.$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}=(-1)^k\cdot\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}=(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$

Példa: $\arcsin x \qquad f'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{k=0}^\infty\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-1)^k x^{2k}$

Tehát $\arcsin x=\sum_0^\infty\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!\,(2k+1)}\cdot x^{2k+1}.$

$$e^{-x^2}=\sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}.$$

Alkalmazás: - diffegyenletek megoldása

$$y''=xy^2-y' \qquad \underset{\substack{\Downarrow \\ a_0=2}}{y(0)=2}; \quad \underset{\substack{\Downarrow \\ a_1=1}}{y'(0)=1}.$$

$y=\sum_0^\infty a_k x^k$ alakban

$$y'=\sum_1^\infty k a_k x^{k-1}=\sum_0^\infty (k+1)a_{k+1}x^k$$

$$y''=\sum_2^\infty k(k-1)a_k x^{k-1}=\sum_0^\infty (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k$$

$$xy^2 = x\left(\sum_0^\infty a_k x^k\right)^2 \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{Cauchy}}}{=} \sum_{k=0}^\infty x^{k+1}\sum_{l=0}^{k} a_l a_{k-l} = \sum_{k=1}^\infty x^k \sum_{l=0}^\infty a_l a_{k+1-l}.$$

Tehát:

$$\sum_{k=0}^\infty (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k = \sum_{k=1}^\infty x^k \sum_{l=0}^{k-1} a_l a_{k-1-l} - \sum_{k=0}^\infty (k+1)a_{k+1}x^k$$

$k=0$-ra: $2\cdot 1\cdot a_2 = 1\cdot a_1 = 1 \Rightarrow a_2=\frac{1}{2}$.

$k=1$-re: $3\cdot 2\cdot a_3 = a_0^2-2a_2 \Rightarrow a_3=\frac{1}{6}\cdot(4-1)=\frac{1}{2}$ ...

- Határértékszámítás:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1-1}}{(2k+1)!} = 1+0=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{k+1-1}}{k+1} = 1+0=1.$$

$$f=\ln(1+x) \Rightarrow f'=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_0^\infty (-1)^k x^k \rightarrow$$

$$\ln(1+x)=\sum_0^\infty \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}.$$

XII. 9.

26. előadás

Definíció: $\Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-t}t^{a-1}\,dt$

$a>0$: $\quad a\Gamma(a) = \int_0^\infty \underbrace{a t^{a-1}}_{u'} \underbrace{e^{-t}}_{v}\, dt = \underset{\overset{\parallel}{0}}{\left[t^a e^{-t}\right]_0^\infty} + \int_0^\infty t^a e^{-t}\, dt =$

$= \Gamma(a+1)$.

Ha $a \in \mathbb{N}^*$:

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1)\dots$

$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = \left[e^{-t}\right]_0^\infty = 1$

$\Gamma(n) = (n-1)!$

Állítás: e transzcendens (azaz nem ∃ p egész együtthatós polinom, aminek e a gyöke).

Bizonyítás: P_n n-edfokú polinom:

$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$; $a_k \in \mathbb{Z}$; $n \in \mathbb{N}$.

Megmutatjuk, hogy $\forall\, P_n$-hez $\exists\, S \neq 0$ szám, amire $P_n(e)\cdot S \neq 0 \Rightarrow P_n(e) \neq 0$.

Legyen $S = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} (1-t)^p (2-t)^p \dots (n-t)^p\, dt$.

Megmutatjuk, hogy $p \in \mathbb{N}$-t lehet úgy választani P_n-hez, hogy S „jó" legyen.

$$P_n(e)\cdot S = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(p-1)!}\cdot \int_0^\infty e^{k-t} t^{p-1} \left((1-t)\cdots(n-t)\right)^p dt \; * =$$

$$= * \frac{a_0}{(p-1)!}\int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} \underbrace{\left(n! + \sum_{i=1}^{n} c_i t^i\right)^p}_{n!^p + \sum_{i=1}^{np} d_i t^i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(p-1)!}\cdot \int_0^\infty e^{k-t} \dots$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} n!^p}_{(p-1)!\, n!^p} + \underbrace{\sum_{i=1}^{np} d_i \int_0^\infty e^{-t} t^{p+i-1}}_{K_p!}$$

Tehát $$P_n(e)\cdot S = a_0 n!^p + \overset{A\in\mathbb{Z}}{A}p + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(p-1)!}\int_0^\infty e^{k-t}t^{p-1}\prod_{l=1}^{n}(l-t)^p\,dt =$$

$k-t=-y \quad y\in(-k;\infty) \quad dt=dy$

$$= a_0 n!^p + Ap + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(p-1)!}\left[\int_{-k}^{0} + \int_0^\infty e^{-y}(k+y)^{p-1}\prod_{l=1}^{n}(l-k-y)^p\,dy\right] =$$

$$= a_0 n!^p + Ap + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(p-1)!}I_{1k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(p-1)!}I_{2k} \mathrel{\dot=} *$$

Tfh $p > \max(a_0, n)$, prím.

$$I_{2,k} = \int_0^\infty e^{-y}\underbrace{(k+y)^{p-1}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}(l-k-y)^p(-1)^p}_{\substack{Q(y)\text{ } y \text{ egész}\\ \text{együtthatós polinom}}} y^p\,dy =$$

$$Q(y)=\sum_{i=0}^{r} b_i y^i \;;\; b_i\in\mathbb{Z}$$

$$= \int_0^\infty e^{-y}\sum_{i=0}^{r} b_i y^i\, y^p\,dy = \sum_{i=0}^{r} b_i\int_0^\infty e^{-y}y^{i+p}\,dy = \sum_{i=0}^{r} b_i(p+i)! =$$

$$= B_k p!$$

Ekkor $$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(p-1)!}\overset{\in\mathbb{Z}}{I_{2,k}} = \sum_{k=1}^{n}\overset{\in\mathbb{Z}}{a_k B_k p} = pB, \text{ ahol } B\in\mathbb{Z}.$$

Eleje:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(p-1)!}I_{1,k}\right| \le \sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{(p-1)!}\left|\int_{-k}^{0} e^{-y}(k+y)^{p-1}\prod_{l=1}^{n}(l-k-y)^p\,dy\right| =$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right)e^n n^{p-1} n^{np}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Integrációs út hossza}}}{n}\cdot\frac{1}{(p-1)!} = \underset{\substack{\uparrow\\ p\text{-től függő}\\ \text{konstans}}}{\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right)e^n\right]}\cdot\frac{\left[n^{n+1}\right]^p}{(p-1)!}\xrightarrow[p\to\infty]{} 0.$$

Ekkor $$* = a_0 n!^p + \underset{\substack{\downarrow\\ \mathbb{Z}}}{(A+B)}p + M(p) \qquad p > a_0, n, p_0,\ \text{hogy } |M(p)| < \tfrac{1}{2}.$$

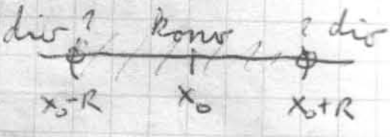
a Δ- egyenlőtlenség szerint:

Hatványsorok

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = f(x)$ Konvergenciasugár: $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$.

Egyenletesen konvergens: $x \in [x_0 - R + \varepsilon, x_0 + R + \varepsilon]$.

Ekkor lehet tagonként deriválni, integrálni.



Taylor-sor: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k \overset{?}{=} f(x)$

Ha igen, akkor f analitikus függvény.

Pl.: a) $\frac{1}{\sqrt{2+x}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{2+x}} = (2+x)^{-\frac{1}{2}} = f(x)$

$f'(x) = -\frac{1}{2}(2+x)^{-\frac{3}{2}}$

$f''(x) = \frac{3}{4}(2+x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}(2+x)^{-\frac{5}{2}}$ $\qquad \binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2k+1}{2}}{k!}$

$f^{(k)}(x) = (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot k! \cdot (2+x)^{-\frac{1}{2}-k}$

$\frac{1}{\sqrt{2+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot \cancel{k!} \cdot 2^{-\frac{1}{2}-k}}{\cancel{k!}} \cdot x^k$

b) $\frac{1}{\sqrt{2+x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot 2^{-\frac{1}{2}-k} \cdot x^{2k}$.

$|p_n(e) S| = |a_0 n!^n + (A+B)n + M(n)| \geq |a_0 n!^n + (A+B)n| - |M(n)| >$

$> 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |p_n(e) S| > \frac{1}{2}$; $\quad p_n(e) \neq 0$. $\square$

VÉGE