

A feladat: Adjunk egy-egy értelmű megfeleltetést $A_{z,v}$ és $SO(3)$ elemei között, ahol

$$A_{z,v}(u) = \frac{zu + v}{-\bar{v}u + \bar{z}}, u \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Segítség: 1. $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \approx \mathbb{C}P^1$ és $S^2 \subset \mathfrak{S}\mathbb{H}$ közötti kapcsolat ($\mathfrak{S}\mathbb{H} = \mathbb{R}i + \mathbb{C}j$):

$$u \rightarrow \frac{|u|^2 - 1}{1 + |u|^2}i + \frac{2\Im u}{1 + |u|^2}j + \frac{2\Re u}{1 + |u|^2}k \quad (1)$$

Ami a j - k sík elemeit bevetíti az $\mathfrak{S}\mathbb{H}$ -ban lévő S^2 gömbbe (aminek egy átmérője a $0i + 0k + 0j$ és $1i + 0k + 0j$ pontokat összekötő szakasz).

2. $SO(3)$ hogyan hat $\mathfrak{S}\mathbb{H}$ -n?

3. A $\mathbb{C}P^1$ törtlineáris transzformációja az (1)-ben megadott leképezés szerint ugyanaz, mint $SO(3)$ egy elemének hatása $\mathfrak{S}\mathbb{H}$ -n

Megjegyzés: $\mathfrak{S}\mathbb{H}$ a kvaterniók 3 dimenziós nemvalós altere. Az 1. pontban adott gömb pedig ebben az altérben értendő.