

I. Lineáris Algebra ZH (2009/2010 ősz)

Minden rendes feladat 10 pontos. A Bónusz feladatok pontszámát lásd a feladatnál. 90 perc, + amennyit kisértok! Jó mulatást!

1. Bizonyítsd be teljes indukcióval(!), hogy minden $n \geq 1$ természetes számra

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

2. Legyen $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ az egység hosszú komplex számok halmaza, vagyis az egységkörvonal a komplex síkon. Bizonyítsd be, hogy S^1 a komplex számok szokásos szorzásával kommutatív csoportot alkot.

3. Legyen $A = (1, 0, 1)$, $B = (-2, 1, 3)$ és $C(0, 0, 1)$. Hol helyezkednek el az xy síkban azon D pontok, melyekre az $ABCD$ tetraéder térfogata 100 egység?

4. Oldd meg a $z^6 + (8 - 8i)z^3 - 64i = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán és add meg a megoldásokat algebrai alakban.

5. Bontsd fel irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}[x]$ -ben az $f(x) = x^6 - 4x^5 + 32x^3 - 84x^2 + 96x - 48$ polinomot annak biztos tudatában, hogy $f(1 + i) = 0$.

6. Bizonyítsd be, hogy nincsen olyan egész együtthatós $f(x)$ polinom, melyre $f(2) = 44$, $f(5) = 23$ és $f(8) = 14$.

1. **Bónusz.** A *Kincs, ami nincs* című klasszikusban (a) Hogy hívták Bud Spencer papagáját? (b) Mi a sziget neve? (c) Hogy hívták a szamurájt? (d) Hogy hívták Terence Hill-t a filmben? (0.5p-1p-1p-0.5p)

2. **Bónusz.** A *Star Wars* című dokumentumfilmben (a) Mit jelképez a sárgás fénykard? (b) Ki mondta, hogy "Bennem nincs vívódás!" (c) Mi a neve a vukik bolygójának? (A rendes neve, nem a Czerka féle!) (d) Ki volt a Hoth bolygón lévő Felkelő Bázis katonai vezetője? (0.5p-0.5p-0.5p-1p)

3. **Bónusz.** A *Kelly hősei* című remekműben (a) Melyik városba próbálnak eljutni? (b) "Hány aranyrudat szállít a konvojuk, alezredes úr?" (c) Milyen feliratot hagytak a bank falán? (d) CsB: "Tudod te, mi van abban a bankban? 14 millió dollár értékű arany van abban a bankban." BJ: "Az testvérek közt is ??? millió márká." (1p-1p-1p-1p)

4. **Bónusz.** (a) Ki most a BME TTK dékánja? (b) Ki most a gazdasági és fejlesztési miniszterünk? (c) Hány külön betűvel jelölt épülete van most a BME-nek? (d) Mondj 5 híres(!) halott(!) magyar(!) matematikust. (0.5p-0.5p-0.5p-0.5p)